विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January 1977, Pages 1-8

दो चरों वाले H-फलन की अनन्त श्रेणी के रूपान्तरण

ओ० पी० गर्ग
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त—फरवरी 19, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों वाले H-फलन की अनन्त श्रेणी के तीन रोचक रूपान्तरण प्राप्त किये गये हैं। फाक्स का H-फलन, माइजर का G-फलन तथा हाइपरज्यामितीय फलन हमारे मुख्य फलों की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं।

Abstract

On transformations of infinite series of H-function of two variables. *By* O. P. Garg, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

In this paper we have obtained three interesting transformations of infinite series of H-function of two variables. Transformations involving Fox's H-function, Meijer's G-function and hypergeometric function which are themselves general in nature follow as special cases of our main results.

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में आये दो चरों वाले सार्वीकृत फलन को हाल ही में मित्तल तथा गुप्ता[3] ने प्रचलित किया है और यह निम्नांकित रूप में परिभाषित एवं प्रदर्शित है :

$$H(x,y)=H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, n_1\\ p_1, q_1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(a_j;\alpha_j, A_j)_{1,p_1}\\ (b_j;\beta_j, B_j)_{1,q_1}\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2, q_2\end{pmatrix} & \begin{matrix}(c_j, \gamma_j)_{1,p_2}\\ (d_j, \delta_j)_{1,q_2}\end{matrix} & \begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix} & \begin{matrix}(e_j, E_j)_{1,p_3}\\ (f_j, F_j)_{1,q_3}\end{matrix} & \end{matrix}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t)\theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s\, y^t\, ds\, dt \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ

$$\left.\begin{aligned}
\phi(s, t) &= \frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)}{\prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j t)} \\
\theta_1(s) &= \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j-\delta_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1-c_j+r_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+\delta_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-r_j s)} \\
\theta_2(t) &= \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j-F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1-e_j+E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-\Gamma_j t)}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot2)$$

x, y शून्य के तुल्य नहीं हैं और रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है। अनृण पूर्णांक n_i, p_i, $q_i(i=1, 2, 3)$ और m_2, m_3 ऐसे हैं कि $0 \leqslant n_i \leqslant p_i$, $q_1 \geqslant 0$, $0 \leqslant m_j \leqslant q_j (i=1, 2, 3; j=2, 3)$, सभी अक्षर $A_j . \alpha_j$, B_j, β_j. r_j, δ_j, E_j एवं F_j धन हैं।

कंटूर L_1 तथा L_2 उपयुक्ततः परिभाषित हैं और समाकल्य के समस्त पोलों को सरल मान लिया गया है।

(1·1) में परिभाषित $H(x, y)$ जिन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अभिसारी होता है और एक वैश्लेषिक फलन को प्रदर्शित करता है वे मित्तल तथा गुप्ता के प्रपत्र में उल्लिखित हैं [3, p. 119 (i) से (iv)]। स्थानाभाव के कारण ये प्रतिबन्ध नहीं दिये जा रहे। किन्तु फिर भी यह मान लिया गया है कि इनसे संगत प्रतिबन्ध प्रस्तुत प्रपत्र में आये दो चरों वाले समस्त H-फलनों द्वारा तुष्ट होते हैं। $H(x, y)$ की विभिन्न विशिष्ट दशायें भी दे दी गई हैं।

यहाँ पर $(a_j; \alpha_j, A_j)_{1,p}$ से प्राचलों के अनुक्रम

$$(a_1; \alpha_1, A_1), \ldots, (a_p; \alpha_p, A_p); (a_j, \alpha_j)_{1,p}$$

क्योंकि

$$(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p) (a)_r = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}, r=1, 2, 3, \ldots, (a)_0=1 \qquad (1\cdot3)$$

का बोध होता है।

और भी

$$H\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0, n\\ p, q\end{pmatrix} & \begin{matrix}(a_j; \alpha_j, A_j)_{1,p}\\ (bj; \beta_j, B_j)_{1,q}\end{matrix} & x\\ \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & y\end{bmatrix}$$

से यह भी सूचित होगा कि ... द्वारा दर्शित प्राचल ठीक वैसे हैं जैसे कि (1·1) में $H(x, y)$ के। इस प्रकार अन्य संकेतनों के सम्बन्ध में मानना होगा।

2. प्रसार सूत्र

हम दो चरों वाले H-फलन सम्बन्धी निम्नांकित प्रसार सूत्रों की स्थापना करेंगे।

प्रसार सूत्र 1

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^r}{r!}H\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0, n_1+1\\ p_1+1, q_1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(1-c-r; h, k),(a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1}\\ (b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1}\end{matrix} & x\\ \begin{pmatrix}m_2+1, n_2\\ p_2, q_2+1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(c_j, r_j)_{1, p_2}\\ (d_j+r, h),(d_j, \delta_j)_{1, q_2}\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3, q_3+1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(e_j, E_j)_{1, p_3}\\ (f_j, F_j)_{1, q_3}, (f-r, k)\end{matrix} & y\end{bmatrix}$$

$$=\Gamma(1-c-d-f)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-z)^r}{r!(c+d+f)_r}$$

$$\times H\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0, n_1+1\\ p_1+1, q_1+1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(1-c-r; h, k),(a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1}\\ (f+d; h, k), (b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1}\end{matrix} & x\\ \begin{pmatrix}m_2+1, n_2\\ p_2+1, q_2+1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(c_j, r_j)_{1, p_2}, (1-c-f, h)\\ (d+r, h), (d_j, \delta_j)_{1, q_2}\end{matrix} & y\\ \cdots & \cdots & \end{bmatrix}$$

$$+\Gamma(c+d+f-1)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-z)^{1+r-c-d-f}}{r!(2-c-d-f)_r}$$

$$\times H\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0, n_1+1\\ p_1+1, q_1+1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(f+d-r; h, k), (a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1}\\ (f+d; h, k),(b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1}\end{matrix} & x\\ \begin{pmatrix}m_2+1, n_2\\ p_2+1, q_2+1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(c_j, r_j)_{1, p_2}, (1-c-f, h)\\ (1-c-f+r, h),(d_j, \delta_j)_{1,q_2}\end{matrix} & y\\ \cdots & \cdots & \end{bmatrix} \quad (2·1)$$

बशर्ते कि $|\arg(1-z)|<\pi, h, k>0$ जिसमें ··· द्वारा प्रदर्शित प्राचल जो (2·1) में H-फलन में आये हैं वे ही हैं जैसे (2·1) में हैं।

(2·1) की उपपत्ति

(2·1) के बाम पक्ष में (1·1) से दो चरों वाले H-फलन का मान रखने पर तथा (1·3) का उपयोग करने पर

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} A(s, t) \frac{\Gamma(c+hs+kt)\Gamma(d-hs)(c+hs+kt)_r(d-hs)_r}{\Gamma(1-f+kt)(1-f+kt)_r}$$

$$\times x^s y^t \, ds \, dt \qquad (C)$$

जहाँ $A(s, t)=\phi(s, t)\theta_1(s)\theta_2(t), \phi(s, t), \theta_1(s), \theta_2(t)$ दो (1·2) द्वारा प्राप्त किये जाते है। (c) में समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करने पर

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{L_1} \int_{L_2} A(s, t) \frac{\Gamma(c+hs+kt)\Gamma(d-hs)}{\Gamma(1-f+kt)}$$

$$\times {}_2F_1(c+hs+kt, d-hs; 1-f+kt; z) \, x^s \, y^t \, ds \, dt \qquad (D)$$

अब निम्नांकित फल [1, p. 108(1)] से

$${}_2F_1(a, b; c; z)= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \, {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b} \, {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \qquad (2·2)$$

जहाँ $|\arg(1-z)|<\pi$

(D) द्वारा व्यक्त व्यंजक को

$$\Gamma(1-c-d-f)\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} A(s, t) \frac{\Gamma(c+hs+kt)\Gamma(d-hs)}{\Gamma(1-c-f-hs)\Gamma(1-d-f+hs+kt)}$$

$$\times {}_2F_1(c+hs+kt, d-hs; c+d+f; 1-z) \, x^s \, y^t \, ds \, dt$$

$$+\Gamma(c+d+f-1) \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} A(s, t)(1-z)^{1-c-d-f} \, {}_2F_1(1-c-f-hs,$$

$$1-d-f+hs+kt; 2-c-d-f; 1-z) \, x^s \, y^t \, ds \, pt \qquad (E)$$

के रूप में रखा जा सकता है। (E) में आये गॉस हाइपरज्यामितीय फलन को [1, p. 56(2)] की सहायता से प्रसारित करने पर और उसके अन्तर्गत समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करने पर निम्नांकित फल प्राप्त होता है।

$$\Gamma(1-c-d-f) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z)^r}{r!(c+d+f)_r} \frac{(1)}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} A(s, t)$$

$$\times \frac{\Gamma(c+r+hs+kt)\Gamma(d+r-hs)}{\Gamma(1-c-f-hs)\Gamma(1-d-f+hs+kt)} x^s y^t \, ds \, dt$$

$$+\Gamma(c+d+f-1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z)^{1+r-c-d-f}}{r!(2-c-d-f)_r} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2$$

$$\times \int_{L_1} \int_{L_2} A(s,t) \frac{\Gamma(1+r-c-f-hs)\Gamma(1+r-d-f+hs+kt)}{\Gamma(1-c-f-hs)\Gamma(1-d-f+hs+kt)} x^s y^t \, as \, dt \quad (F)$$

(F) में $(1 \cdot 1)$ के सम्प्रयोग से $(2 \cdot 1)$ का दक्षिण पक्ष प्राप्त होगा।

(C) में समाकलन तथा संकलन के क्रम के परस्पर विनिमय के सम्बन्ध में यह देखा जाता है कि

(i) $${}_2F_1\left(\begin{matrix} c+hs+kt, \; d-hs \\ 1-f+kt \end{matrix}; z\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c+hs+kt)_r (d-hs)_r z^r}{(1-f+kt)_r \, r!}$$

किसी भी निश्चित क्षेत्र $0 \leqslant |z| \leqslant |a|$ में चाहे $|a| < 1$ अथवा $|a| = 1$, $Re(1-c-d-f) > 0$ में समरूप से अभिसारी है।

(ii) समाकल में आये गामा फलन प्रभागशः संतत होते हैं।

(iii) (C) में आये द्विगुण मेलिन प्रकार का समाकल पूर्णतया अभिसारी है क्योंकि इस प्रपत्र में आये वे प्रतिबन्ध दो चरों वाले समस्त H-फलनों द्वारा तुष्ट होते मान लिये गये हैं जो मित्तल तथा गुप्ता [3, p. 119(i) से (vi)] द्वारा दिये गये हैं।

फलतः (C) में समाकलन तथा संकलन के क्रम का परस्पर विनिमय न्यायसंगत है। इसी प्रकार (E) में समाकलन तथा संकलन के क्रम परिवर्तन को न्यायसंगत माना जा सकता है। इस प्रकार उपपत्ति पूरी हुई।

$(2 \cdot 1)$ की विशिष्ट दशायें

$(2 \cdot 1)$ में यदि हम प्रत्येक अक्षर A_j, B_j, E_j, F_j को इकाई तुल्य रखें, $k=1, f_1=0, m_3=1$, $n_3=p_3$ तथा सीमा को $y \to 0$ मान लें तो हमें ज्ञात फल की सहायता से [2,p. 32(1·4)] कुछ सरलीकरण के उपरान्त निम्नांकित फल प्राप्त होता है :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} \frac{1}{\Gamma(1-c+r)} H_{p,q}^{m,n}\left[x \middle| \begin{matrix} (a-r, h), (a_j, \alpha_j)_{2,p} \\ (b+r, h), (b_j, \beta_j)_{2,q} \end{matrix}\right]$$

$$= \Gamma(a-b-c) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z)^r}{r!(1-a+b+c)_r}$$

$$\times H_{p+1,q+1}^{m,n}\left[x \middle| \begin{matrix} (a-r, h), (a_j, \alpha_j)_{2,p}, (a-c, h) \\ (b+r, h), (b_j, \beta_j)_{2,q}, (b+c, h) \end{matrix}\right]$$

$$+\Gamma(b+c-a)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-z)^{a+r-b-c}}{r!(1+a-b-c)_r}$$

$$\times H_{p+1,\,q+1}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(b+c-r,\,h),(a_j,\,\alpha_j)_{2,\,p},\,(a-c,\,h)\\(a-c+r,\,h),(b_j,\,\beta_j)_{2,\,q},\,(b+c,\,h)\end{matrix}\right.\right] \tag{2·3}$$

जहाँ $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ तथा (2·1) से सरलता से प्राप्य प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

और भी, यदि हम (2·3) में समस्त α β तथा h को इकाई मान लें तो हमे माइजर के G-फलन से युक्त निम्नांकित प्रसार सूत्र प्राप्त होगा :

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^r}{r!\Gamma(1-c+r)}\,G_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}a-r,\,(a_j)_{2,\,p}\\b+r,\,(b_j)_{2,\,q}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\Gamma(a-b-c)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-z)^r}{r!(1-a+b+c)_r}\,G_{p+1,\,q+1}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}a-r,\,(a_j)_{2,\,p},\,a-c\\b+r,\,(b_j)_{2,\,q},\,b+c\end{matrix}\right.\right]$$

$$+\Gamma(b+c-a)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-z)^{a+r-b-c}}{r!(1+a-b-c)_r}\,G_{p+1,\,q+1}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}b+c-r,\,(a_j)_{2,\,p},\,a-c\\a-c+r,\,(b_j)_{2,\,q},\,b+c\end{matrix}\right.\right] \tag{2·4}$$

जहाँ $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ तथा (2·1) से सरलता से प्राप्त प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

पुनश्च, यदि (2·4) में $m=n=p=q=1$ रखें और $a-b$ के स्थान पर a तथा c के स्थान पर b रखें, फिर ज्ञात फल [1, p. 208(5)] का उपयोग करें तो निम्नांकित प्रसार सूत्र प्राप्त होगा

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1-a+2r)}{\Gamma(1-b+r)r!}\,(zx)^r(1+x)^{-(1-a+2r)}$$

$$=\Gamma(a-b)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-a+2r)(1-z)^r\,x^r}{\Gamma(1-b+r)\Gamma(a-b-r)(1-a+b)_r\,r!}$$

$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}1-a+2r,\,1-a+b+r\\1-b+r\end{matrix};\,x\right) \tag{2·5}$$

जहाँ $R(a-b)>0$ तथा $|\,x\,|<1$.

प्रसार सूत्र 2

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r z^r}{r!}\,H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0,\,n_1\\p_1+1,\,q_1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}m_2+1,\,n_2\\p_2,\,q_2+1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}m_3,\,n_3\\p_3,\,q_3+1\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_j;\,\alpha_j,\,A_j)_{1,\,p_1},\,(\lambda+r;\,h,k)\\(b_j,\,\beta_j,\,B_j)_{1,\,q_1}\\(c_j,\,\gamma_j)_{1,\,p_2}\\(d+r,\,h).\,(d_j,\,\delta_j)_{1,\,q_2}\\(e_j,\,E_j)_{1,\,p_3}\\(f_j,\,F_j)_{1,q_3},\,(f+r,\,k)\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\y\end{matrix}\right]$$

$$=\Gamma(\lambda-d-f)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{-d}(1-1/z)^r}{(1+d+f-\lambda)_r\, r!}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\cdots & \cdots \\ \binom{m_2+1,\ n_2}{p_2+1,\ q_2+1} & \begin{matrix}(c_j,\ r_j)_{1,\ p_2},\ (\lambda-f,\ h)\\ (d+r,\ h),\ (d_j,\ \delta_j)_{1,\ q_2}\end{matrix}\\ \binom{m_3,\ n_3+1}{p_3+2,\ q_3+2} & \begin{matrix}(\lambda-d-r,\ k),\ (e_j,\ E_j)_{1,\ p_3},\ (\lambda-d,\ h)\\ (f_j,\ F_j)_{1,\ q_3},\ (f,\ k),\ (\lambda-d,\ k)\end{matrix}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}zx^h\\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$+\Gamma(d+f-\lambda)\, z^{d-\lambda}\,(1-z)^{\lambda-d-f}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-1/z)^r}{(1+\lambda-d-f)_r\, r!}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\cdots & \cdots \\ \binom{m_2,\ n_2+1}{p_2+1,\ q_2+1} & \begin{matrix}(d-r,\ h),\ (c_j,\ r_j)_{1,\ p_2}\\ (d_j,\ \delta_j)_{1,\ q_2},\ (d,\ h)\end{matrix}\\ \binom{m_3+1,\ n_3}{p_3+2,\ q_3+2} & \begin{matrix}(e_j,\ E_j)_{1,\ p_3},\ (f,\ k),(\lambda-d,\ k)\\ (\lambda-d+r,\ k),(f_j,\ F_j)_{1,\ q_3},\ (f,\ k)\end{matrix}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}x\\ \\ yz^k\end{matrix}\right] \tag{2·6}$$

बशर्ते कि $|\arg(1-z)|<\pi,\ h,\ k>0.$

प्रसार सूत्र 3

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r\, z^r}{r!}\, H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1}{p_1+1,\ q_1} & \begin{matrix}(a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{1,\ p_1},\ (\lambda+r;\ h,\ k)\\ (b_j;\beta_j,\ B_j)_{1,\ q_1}\end{matrix}\\ \binom{m_2+1,\ n_2}{p_2,\ q_2+1} & \begin{matrix}(c_j,\ r_j)_{1,\ p_2}\\ (d+r,\ h),(d_j,\ \delta_j)_{1,q_2}\end{matrix}\\ \cdots & \cdots\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r(-)^{-a}\, z^{-a-r}}{r!}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1+1}{p_1+2,\ q_1+1} & \begin{matrix}(\lambda-a-r;\ h,\ k),(a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{1,\ p_1},\ (\lambda-a;\ a,\ k)\\ (\lambda-a;\ h,\ k),(b_j;\ \beta_j\ ,\ B_j)_{1,\ q_1}\end{matrix}\\ \binom{m_2+1,\ n_2+1}{p_2+1,\ q_2+2} & \begin{matrix}(d-a,\ h),(c_j,\ r_j)_{1,\ p_2}\\ (d-a,\ h),(d_j,\ \delta_j)_{1,\ q_2},\ (d-a-r,\ h)\end{matrix}\\ \cdots & \cdots\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right]$$

$$+\frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^{-d}\, z^{-d-r}}{r!}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\cdots \\ \begin{pmatrix}m_2+2, n_2+1 \\ p_2+2, q_2+2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}m_3, n_3+1 \\ p_3+2, q_3+1\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\cdots \\ (1-a+d, h),(c_j, r_j)_{1, p_2}, (1+d-a+r, h) \\ (d+r,h),(1+d-a, h), (d_j, \delta_j)_{1, q_2} \\ (\lambda-d-r, k),(e_j, E_j)_{1, p_3}, (\lambda-d, k) \\ (f_j, F_j)_{1, q_3}, (\lambda-d, k)\end{matrix}\right| \begin{matrix} x(-z)^h \\ y \end{matrix}\right] \tag{2·7}$$

बशर्ते कि $|\arg(1-z)|<\pi, h, k>0$.

प्रसार सूत्र 2 तथा 3 की उपपत्तियाँ

प्रसार सूत्र 2 तथा 3 को सिद्ध करने के लिये हम प्रसार सूत्र 1 की भाँति अग्रसर होते हैं। अन्तर इतना हो रहता है कि (2·2) के स्थान पर ज्ञात फल [1, p. 108(4)] तथा [1, p. 10(8)] का प्रयोग करते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० के० सी० गुप्ता तथा डा० सी० एल० गौड़ का पथप्रदर्शन एवं सुझावों के लिये आभारी है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental functions, मैकग्राहिल, न्यूयार्क,1953.
2. कौल, सी० एल०, प्रोसी० इंडियन एके० साइंस, 1972, 75A.
3. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, प्रोसी० इंडियन एके० साइंस, 1972, 75A.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January 1977, Pages 9-21

सार्वीकृत द्विगुण L–H परिवर्त

एस० के० वशिष्ट तथा एस० पी० गोयल
गणित विभाग, वनस्थली विद्यापीठ, वनस्थली, राजस्थान

[प्राप्त—फरवरी 27, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में एक द्विगुण परिवर्त दिया गया है जिसकी अष्टि चरघातांकी फलन तथा दो चरों वाले H-फलन का गुणनफल है। विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त कुछ एकाकी तथा द्विगुण समाकल परिवर्तों का भी उल्लेख हुआ है।

Abstract

On a generalised double L-H transform. *By* S. K. Vasishta and S. P. Goyal, Department of Mathematics, B. V. College of Arts and Science, P. O. Banasthali Vidyapith, Rajasthan.

In this paper, we introduce a double integral transform whose kernel is the product of exponential function and the *H*-function of two variables. Since this integral transform is the most general one introduced so far, its study will extend and unify a number of scattered results given from time to time by various authors. Next we mention some single and double integral transforms, derived as its particular cases having simpler functions as kernels which occur frequently in Physics and applied Mathematics. Two inversion formulae, one for the said transform and the other for the corresponding single transform have also been established. In the end, an interesting example for the double transform has been considered for the verification of its inversion formula.

1. परिभाषा

हम द्विगुण L-H परिवर्त को समीकरण

$$\phi(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha px-\beta cy}\, H[\xi(px)^\mu, \eta(qy)^\nu]\, f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.1}$$

द्वारा परिभाषित करते हैं जहाँ $H[x, y]$ दो चरों वाला H फलन है जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है [8]

$$H[x, y]=H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, n_1\\ p_1, q_1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2, q_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_j; \alpha_j, A_j)_{1}, {}_{p_1}\\ (b_j; \beta_j, B_j)_1, {}_{q_1}\\ (c_j, \gamma_j)_1, {}_{p_2}\\ (d_j, \delta_j)_1, {}_{q_2}\\ (e_j, E_j)_1, {}_{p_3}\\ (f_j, F_j)_1, {}_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(s, t)\,\theta_1(s)\,\theta_2(t)x^s y^t\,ds\,dt \qquad (1.2)$$

जहाँ
$$\phi(s, t)=\frac{\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)}{\prod_{j=n+1}^{p_1}\Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t)\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+\beta_j s+\beta_j t)}$$

$$\theta_1(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-\delta_j s)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+y_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j s)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-y_j s)}$$

$$\theta_2(t)=\frac{\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j t)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_j t)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_j t)}$$

x तथा y शून्य के तुल्य नहीं हैं तथा रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है। n_i, p_i, q_i तथा m_j अनृण संख्यायें ऐसी हैं कि $0\leqslant n_i\leqslant p_i\; q_1\geqslant 0,\; 0\leqslant m_j\leqslant q_j\; (i=1, 2, 3; j=2, 3)$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ तथा $A, B\; E$ एवं F ये सभी अक्षर धन हैं।

(1.2) में आये कंटूर L_1 तथा L_2 उपयुक्त प्रकार से परिभाषित हैं और समाकल्य के सभी पोल सरल मान लिये गये हैं, $H[x, y]$ द्वारा वैश्लेषिक फलन प्रदर्शित होने के प्रतिबन्ध, इसका उपगामी प्रसार विशिष्ट दशायें तथा (1.2) में समाकल के अभिसरण के प्रतिबन्ध मित्तल तथा गुप्ता [8, pp. 119-21] द्वारा दिये जा चुके हैं।

पुनश्च:

$(a_j; \alpha_j, A_j)_1 p$ से $(a_1; \alpha_1, A_1)\,(a_2; \alpha_3, A_2)\;\; (a_p; \alpha_p, A_p)$ का बोध होता है जबकि $(a_j, \alpha_j)_1, p$ से $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2) \ldots (a_p, \alpha_p)$ का।

विशिष्टता लाने के लिये हम $f(x, y)$ श्रेणी के फलनों तक सीमित रहेंगे जिससे कि

$$f(x, y) = 0(x^k y^l) \; x \text{ तथा } y \text{ के लघु मानों के लिये}$$

$$= 0(x^\rho y^\sigma \, e^{-ux-vy}) \; x, y \text{ के दीर्घ मानों के लिये}$$

द्विगुण L-H परिवर्त (1.1) का अस्तित्व होता है यदि निम्न में से कोई भी एक प्रतिबन्ध तुष्ट हो

(A) (i) $Re(u)>0,\ Re(v)>0,\ \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0$

(ii) $$U = \sum_1^{n_1} (\alpha_j) - \sum_{n_1+1}^{p_1} (\alpha_j) - \sum_1^{q_1} (\beta_j) + \sum_1^{m_2} (\delta_j) - \sum_{m_2+1}^{q_2} (\delta_j)$$

$$+ \sum_1^{n_2} (\gamma_j) - \sum_{n_2+1}^{p_2} (\gamma_j) > 0$$

$$V = \sum_1^{n_1} (A_j) - \sum_{n_1+1}^{p_1} (A_j) - \sum_1^{q} (B_j) + \sum_1^{m_3} (F_j) - \sum_{m_3+1}^{q_3} (F_j) + \sum_1^{n_3} (E_j) - \sum_{n_3+1}^{p_3} (E_j > 0$$

$$R = \sum_1^{p_1} (\alpha_j) + \sum_1^{p_2} (\lambda_j) - \sum_1^{q_1} (\beta_j) + \sum_1^{q_2} (\delta_j) < 0$$

$$S = \sum_1^{p_1} (A_j) + \sum_1^{p_3} (E_j) - \sum_1^{q_1} (B_j) + \sum_1^{q_3} (F_j) < 0$$

$$|\arg \xi p^\mu| < (\tfrac{1}{2}) U\pi, \quad |\arg \eta\, q^\nu| < (\tfrac{1}{2}) V\pi.$$

(iii) $\mu>0,\ \nu>0,\ Re(k+\mu(d_i/\delta_i)+1)>0\ (i=1,\dots, m_2)$

$Re(l+\nu(f_j/F_j)+1)>0\ (j=1,\dots, m_3)$

(B). (i) $Re(u)=Re(v)=0,\ \alpha>0,\ \beta>0$

(ii) सेट A में दिये गये प्रतिबन्ध (ii) तथा (iii) तुष्ट होते हों

2. (1.1) द्वारा परिभाषित समाकल परिवर्त की विशिष्ट दशायें

(i) (1.1) में $n_1 = p_1 = q_1 = 0$ लेने पर तथा इसमें [8, p. 120] का प्रयोग करने पर निम्नांकित समाकल परिवर्त प्राप्त होता है :

$$\phi(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha px - \beta qy} \; H^{m_2, n_2}_{p_2, q_2}\left[\xi (px)^\mu \left| \begin{matrix} (c_j, \gamma_j)_{1, p_2} \\ (d_j, \delta_j)_{1, q_2} \end{matrix} \right. \right]$$

$$\times H^{m_3, n_3}_{p_3, q_3}\left[\eta (qy)^\nu \left| \begin{matrix} (e_j, E_j)_{1, p_3} \\ (f_j, F_j)_{1, q_3} \end{matrix} \right. \right] f(x, y)\, dx\, dy \qquad (2.1)$$

यदि हम समस्त y, δ, E तथा F को इकाई मान लें तो परिवर्त (2.1) एक अन्य समाकल परिवर्त प्रदान करेगा जिसे जायसवाल [11, p. 212] ने दिया है।

(ii) (2.1) में $\alpha=\beta=0$ रखने पर निम्नांकित समाकल परिवर्त प्राप्त होता है जिसकी अष्टि दो H-फलनों का गुणनफल है :

$$\phi(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty H_{p_2, q_2}^{m_2, n_2}\left[\xi(px)^\mu\left|\begin{matrix}(c_j, \gamma_j)_{1, p_2}\\ (d_j, \delta_j)_{1, q_2}\end{matrix}\right.\right]H_{p_3, q_3}^{m_3, n_3}\left[\eta(qy)^\nu\left|\begin{matrix}(e_j, E_j)_{1, p_3}\\ (f_j, F_j)_{1, q_3}\end{matrix}\right.\right]\times f(x, y)\, dx\, dy \tag{2.2}$$

बशर्ते कि (1.1) से प्राप्य समस्त प्रतिबन्धों की तुष्टि हो।

यदि (2.2) में $\mu=\nu=1$, $n_2=n_3=0$ रखें तो सिंह [26] द्वारा प्रदत्त परिवर्त प्राप्त होता है पुनः $\xi=\eta=\mu=\nu=1$ रखने पर तथा (2.2) में समस्त y, δ, E तथा F को इकाई मानने पर हमें एक अन्य परिवर्त प्राप्त होता है [6]। और भी $n_2=n_3=0$, $m_2=q_2=m+1$, $p_2=m$, $m_3=q_3=n+1$, $p_3=n$ रखने पर तथा प्राचलों के उपयुक्त चुनाव करने पर जैन [10] का परिवर्त प्राप्त होता है।

चूंकि बेसिल फलन $J_\nu(x)$ संशोधित बेसिल फलन $K_\nu(x)$, व्हिटेकर फलन $e^{-x/2}W_{k, r}(x)$, $e^{-x/2}\times M_{k, r}(x)$, सार्वीकृत लोमेल फलन $J_{\nu\lambda}^{\mu}(x)$ इत्यादि H-फलन [9, pp. 598-601], की विशिष्ट दशायें हैं अतः बोस तथा मेहरोत्रा [3], कुलश्रेष्ठ [13], मुकर्जी [18], निगम [19], पाठक तथा सिंह [20], राठी [21] आदि के परिवर्तों को (2.2) में निहित H-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा ही प्राप्त किया जा सकता है।

(iii) (1.1) में $n_1=\alpha=\beta=0$ लेने पर हमें निम्नलिखित द्विगुण परिवर्त प्राप्त होता है जो नवीन जान पड़ता है।

$$\phi(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ 0}{p_1, q_1}\\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2}\\ \binom{m_3, n_3}{p_3, q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1}\\ (b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1}\\ (c_j, \gamma_j)_{1, p_2}\\ (d_j, \delta_j)_{1, q_2}\\ (e_j, E_j)_{1, p_3}\\ (f_j, F_j)_{1, q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\xi(px)^\mu\\ \\ \eta(qy)^\nu\end{matrix}\right]f(x, y)\, dx\, dy$$

यदि (1.1) में कथित प्रतिबन्ध तुष्ट हों तो (2.3) द्वारा दिया जाने वाले परिवर्त का अस्तित्व होगा।

(2.3) द्वारा दिया गया परिवर्त काफी सामान्य प्रकृति का है और हम $\alpha_i=A_i$; $\beta_j=B_j$ $(i=1 \ldots, p_1 ; j=1 \ldots q_1)$ लें तो यह सिंह तथा श्रीवास्तव [27] के फल में समानीत हो जाता है। यदि (2.3) में $\alpha_i=A_i=\beta_j=B_j=1$ रखें तो हमें मित्तल तथा गोयल [17] का परिवर्त प्राप्त होगा।

(iv) (1.1) $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\xi=1/m^2$, $\eta=1/n^2$, $\mu=\nu=2$ रखने पर तथा समस्त B, γ, δ, A', B' E' एवं F' को इकाई मान लेने पर हमें श्रीवास्तव [28] तथा वर्मा [31] द्वारा हाल ही में प्राप्त निम्नलिखित द्विगुण परिवर्त प्राप्त होता है।

$$\phi(p, q)=pq\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px/2-qy/2}\, G\begin{bmatrix} \begin{pmatrix}0, & n_1\\ p_1, & q_1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(a_{p_1})\\ (b_{q_1})\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2\\ p_2, & q_2\end{pmatrix} & \begin{matrix}(c_{p_2})\\ (d_{q_2})\end{matrix} & \dfrac{p^2x^2}{m^2} \\ & & \dfrac{q^2y^2}{n^2} \\ \begin{pmatrix}m_3, & n_3\\ p_3, & q_3\end{pmatrix} & \begin{matrix}(e_{p_3})\\ (f_{q_3})\end{matrix} & \end{bmatrix} f(x, y)\, dx\, dy \tag{2.4}$$

बशर्ते कि दाहिने पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी हो।

(2.4) में आये $G[x, y]$ के लिये कंटूर निरूपण को प्राप्त करने के लिए (1.2) में समस्त α, β, γ, A, B, E तथा F' को इकाई मानना होगा। यहाँ यह दृष्टव्य है कि दो चरों वाले G-फलन का यह निरूपण अग्रवाल [1] श्रीवास्तव [28], तथा वर्मा [31] द्वारा दिये गये परिवर्तों से कुछ भिन्न होने पर भी मूलतः एक से हैं।

परिवर्त (2.4) वर्मा [30] द्वारा दिये गये अन्य परिवर्त में समानीत हो जावेगा यदि इसमें $n_1=p_1=q_1=0$ तथा $m=n=1$ मान लें।

(v) पुनः $m_3=q_3=1$, $n_3=p_3=0, f_1=0$, $F_1=1$, $\nu=1$, $\beta=\eta=\frac{1}{2}$, रखने पर तथा $f(x, y)$ को (2.1) में केवल x का फलन मान लेने पर यह एकाकी समाकल परिवर्त में समानीत हो जाता है जिसकी अष्टि चर घातांकी फलन तथा H-फलन का गुणनफल है।

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-\alpha px}\, H^{m_2, n_2}_{p_2, q_2}\left[\xi(px)^\mu \middle| \begin{matrix}(c_j, \gamma_j)_{1, p_2}\\ (d_j, \delta_j)_{1, q_2}\end{matrix}\right] f(x)\, dx$$

बशर्ते कि दाहिने पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी हो।

(2.5) का परिवर्त अत्यन्त सामान्य प्रकृति का है और यदि इसमें $\alpha=0$, $\xi=\mu=1$ मान लें तो यह गुप्ता तथा मित्तल [7] के परिवर्त में समानीत हो जाता है जो फल [9, pp 958-601] के उपयोग

से एक चरवाले समस्त ज्ञात परिवर्त प्रदान करता है-यथा सार्वींकृत L-H परिवर्त [12], माइजर का, लैप्लास परिवर्त [2], सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त [23], हाइपरज्यामितीय परिवर्त [22], माइजर के परिवर्त [15, 16] सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त [14, 29] आदि ।

अन्त में यदि (2.5) में $\alpha=n/4$, $m_2=4$, $n_2=n$, $p_2=m+n$, $q_2=m+n+2$, $\mu=2$, $\xi=\frac{1}{4}$, $\gamma_i=\delta_j=1$ $(i=1, \ldots, m+n; j=1, \ldots, m+n+2)$, $c_i=a_i$, $c_j=\alpha_j$, $d_{i'}=b_i$, $d_{j'}=\beta_j$, $(i=1, \ldots, n;$ $j=1, \ldots, m;$ $i'=1, \ldots 4;$ $j'=1, m+n-2)$ लें तो यह शर्मा [25] द्वारा दिये गया समाकल परिवर्त में समानीत हो जाता है ।

3. (1.1) द्वारा परिभाषित द्विगुण L-H परिवर्त के हेतु प्रतिलोमन सूत्र

यदि
$$\phi(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\alpha px-\beta qy}\, H[\{px)^\mu, \eta(qy)^\nu]\, f(x, y)\, dx\, dy \tag{3.1}$$

तो
$$f(x, y)=-\frac{1}{4\pi 2}\int_{\sigma'_1-i\infty}^{\sigma'+i\infty}\int_{\sigma''-i\infty}^{\sigma''+i\infty} \frac{\psi_2(k, l)}{\psi_1(k, l)}\, x^{-k}\, y^{-l}\, dk\, dl \tag{3.2}$$

जहाँ
$$\psi_2(k, l)=\int_0^\infty\int_0^\infty p^{-k-1}\, q^{-l-1}\, \phi(p, q)\, dp\, dq \tag{3.3}$$

तथा (i) यदि $\alpha>0, \beta>0$, तो

$$\psi_1(k, l)=\alpha^{k-1}\,\beta^{l-1}\, H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, & n_1\\ p_1, & q_1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2+1\\ p_2+1, & q_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}m_3, & n_3+1\\ p_3+1, & q_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_j;\alpha_j, A_j)_{1,p_1}\\ (b_j;\beta_j, B_j)_{1,q_1}\\ (k,\mu), (c_j\,\gamma_j)_{1,p_2}\\ (d_j,\delta_j)_{1,q_2}\\ (l,\nu), e_j, E_j)_{1,p_3}\\ (f_j, F_j)_{1,q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\frac{\xi}{\alpha^\mu}\\ \\ \frac{\eta}{\beta^\nu}\end{matrix}\right] \tag{3.4}$$

(ii) यदि $\alpha=\beta=n_1=0$, तो

$$\psi_1(k, l)=\frac{\xi^K\,\eta^L \prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-\delta_j K)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j K)\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j L)}{\mu.\,\nu.\prod_{j=1}^{p_1}\Gamma(a_j-\alpha_j K-A_j L)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j K)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j K)}$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_j L)}{\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+\beta_j K+B_j L)\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_j L)\prod_{j=n+1}^{q_3}\Gamma(e_j-E_j L)} \tag{3.5}$$

जहाँ $$K=\frac{k-1}{\mu}, L=\frac{l-1}{\nu} \tag{3.5}$$

सूत्र (3.2) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है :

(i) $f(x, y)$ खंडशः संतत हो

(ii) (1.1) द्वारा परिभाषित $[f(x, y)]$ के समाकल परिवर्त का अस्तित्व हो

(iii) $\int_0^\infty \int_0^\infty p^{-\sigma'-1} q^{-\sigma''-1} \phi(p, q)\, dp\, dq$ पूर्णतया अभिसारी हो ।

(iv) या तो जब $\alpha>0, \beta>0$, तो

(a) $\sigma'<Re(\mu(d_1/\delta_1+1)$ $(i=1, \ldots; m_2)$, $\sigma''<Re(\nu(f_j/F_j)+1)$ $(j=1, \ldots, m_3)$.

(b) $U>0, V>0, R<0, S<0, |\arg \xi|<\frac{1}{2}U\pi, |\arg \eta|<(\frac{1}{2})V\pi$

(U, V, R, S अनुभाग 1 में आये सेट A के साथ दी गई संख्याओं के लिये प्रयुक्त)

अथवा जब $\alpha=\beta=n_1=0$, तो

(a) $Re(\mu(c_i-1)/\gamma_i+1)<\sigma'<Re(\nu(d_j/\delta_j)+1$

$1\leqslant i\leqslant n_2 \qquad 1\leqslant j\leqslant m_2$

$Re(\mu(e_1-1)/E_1+1)<\sigma''<Re(\nu(f_j/F_j)+1)$

$1\leqslant i\leqslant n_3 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$

ऊपर दिये गये सेट (b) के प्रतिबन्ध, $n_1=0$ के साथ तुष्ट होते हों ।

उपपत्ति : (1.1) से

$$\psi_2(k, l)=\int_0^\infty \int_0^\infty p^{-k-1} q^{-l-1} \phi(p, q)\, dp\, dq$$

$$=\int_0^\infty \int_0^\infty p^{-k} q^{-l} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha px-\beta qy} H[\xi(px)^\mu, \eta(qy)^\nu] f(x, y)\, dx\, dy\right] dp\, dq \tag{3.6}$$

(3.6) में समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर, जो उपर्युक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है

$$\psi_2(k, l)=\int_0^\infty \int_0^\infty x^k y^l f(x, y) \left[\int_0^\infty \int_0^\infty (px)^{-k} (qy)^{-l} e^{-\alpha px-\beta qy} \times H[\xi(px)^\mu, \eta(qy)^\nu]\, dp\, dq\right] dx\, dy \tag{3.7}$$

$p-$, q-समाकलों का मान गामा फलन की परिभाषा तथा (1. 2) जब $\alpha>0, \beta>0$ (ii) रीड का प्रमेय [24, p. 565] जब $\alpha=\beta=n_1=0$, के प्रयोग करने पर हमें

$$\psi_2(k,\ l)=\psi_1(k,\ l) \int_0^\infty \int_0^\infty x^{k-1}\, y^{l-1} f(x, y)\, dx\, dy \tag{3.8}$$

प्राप्त होता है जहाँ $\psi_1(k, l)$ का अर्थ (3.4) तथा (3.5) में दिया हुआ है ।

अब (3.8) में रीड के प्रमेय II [24, p. 566] को प्रयुक्त करने पर हमें वांछित फल (3.2) प्राप्त होता है ।

(2.5) द्वारा परिभाषित संगत एकाकी L-H परिवर्त के हेतु प्रतिलोमन सूत्र

यदि $$\phi(p)=p \int_0^\infty e^{-\alpha p x} H^{m_2,\ n_2}_{p_2,\ q_2}\left[\xi(px)^\mu \middle| \begin{matrix} (c_j,\ \gamma_j)_{1,\ p_2} \\ (d,\ \delta_j)_{1,\ q_2} \end{matrix}\right] f(x)\, dx \tag{4·1}$$

तो $$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma''_2-i\infty}^{\sigma'_1+i\infty} \frac{\psi_2\,(k)}{\psi_1\,(k)}\, x^{-k}\, dk \tag{4.2}$$

जहाँ $$\psi_2(k)=\int_0^\infty p^{-k-1}\, \phi(p)\, dp \tag{4.3}$$

तथा (i) यदि $\alpha>0$, तो

$$\psi_1(k)=\alpha^{k-1}\, H^{m_2,\ n_2+1}_{p_2+1,\ q_2}\left[\frac{\xi}{\alpha^\mu} \middle| \begin{matrix} (k,\ \mu),\ (c_j,\ \gamma_j)_{1,\ p_2} \\ (d_j,\ \delta_j)_{1,\ q_2} \end{matrix}\right] \tag{4.4}$$

(ii) यदि $\alpha=0$, तो

$$\psi_1(k)=\frac{\xi^k \prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j-\delta_j K) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1-c_j+\lambda_j K)}{\mu \prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+\delta_j K) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-\gamma_j K)}$$

जहाँ $$K=\frac{k-1}{\mu}$$

सूत्र (4.2) निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है :

(i) $|f(x)|$ को एकाकी L-H परिवर्त का अस्तित्व हो जिसे (4.1) द्वारा परिभाषित किया जाता है ।

(ii) $\int_0^\infty p^{-\sigma'-1}\,\phi(p)\,dp$ पूर्णतया अभिसारी हो ।

तथा (iii) या तो $\alpha>0$, तब

(a) $U'=\sum_1^{m_2}(\delta_j)-\sum_{m_2+1}^{q_2}(\delta_h)+\sum_1^{n_2}(\gamma_j)-\sum_{n_2+1}^{p_2}(\gamma_j)>0,$

$|\arg\xi|<(\tfrac{1}{2})U'\pi.$

(b) $\sigma'<Re((d_j/\delta_j)+1) \quad (j=1, \ldots, m_2).$

अथवा $\alpha=0$, तो

(a) समुच्चय (a) में ऊपर दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं

(b) $Re((c_i-1)/\gamma_i+1)<\sigma'<Re((d_j/\delta_j)+1)$

$1\leqslant i\leqslant n_2 \qquad 1\leqslant j\leqslant m_2$

उपर्युक्त सूत्र की उपपत्ति अनुभाग 3 में दिये गये सूत्र के ही समान है ।

चूँकि एकाकी तथा द्विगुण L-H परिवर्तों के लिये प्राप्त प्रतिलोमन सूत्र प्राय: सामान्य प्रकृति के होते हैं अत: मात्र प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई एकाकी तथा द्विगुण परिवर्तों के प्रतिलोमन सूत्र दिये जा सकते हैं जिनका उल्लेख यहाँ पर नहीं दिया जा रहा ।

5. उदाहरण

माना $f(x, y)=x^{\rho-1}\,y^{\sigma-1}\,e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}$ (5.1)

तो $$\phi(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\sigma-1}\,y^{\sigma-1}\,e^{-(\alpha p+\lambda_1)x-(\beta q+\lambda_2)y}\,H[\xi(px)^\mu, \eta(qy)^\nu]\,dx\,dy \qquad (5.2)$$

(5.2) में (1.2) से $H(x, y)$ के लिये कंटूर निरूपण का उपयोग करने, समाकलन के क्रम को बदलने तथा ज्ञात फल के द्वारा $x-$, $y-$ समाकलों का मान निकालने पर तथा पुन: (1.2) का उपयोग करने पर हमें (i) की प्रप्ति होती है ।

(i) जब $\alpha>0$, $\beta>0$, तो

$$\phi(p, q)=pq(\alpha p+\lambda_1)^{-\rho}\,(\beta q+\lambda_2)^{-\sigma}\;H_1\left[\xi\left(\frac{p}{\alpha p+\lambda_1}\right)^\mu, \eta'\left(\frac{q}{\beta_q+\lambda_2}\right)^\nu\right] \qquad (5.3)$$

जहाँ

$$H_1[x, y]=H\left[\begin{pmatrix}0, & n_1\\ p_1, & q_1\end{pmatrix}\begin{matrix}(a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1}\\ (b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1}\end{matrix}\Bigg| x \quad \begin{pmatrix}m_2, & n_2+1\\ p_2+1, & q_2\end{pmatrix}\begin{matrix}(1-\rho, \mu), (c_j, \gamma_j)_{1, p_2}\\ (d_j, \delta_j)_{1, q_2}\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}m_3, & n_3+1\\ p_3+1, & q_3\end{pmatrix}\begin{matrix}(1-\sigma, v), (e_j, E_j)_{1, p_3}\\ (f_j, F_j)_{1, q_3}\end{matrix}\Bigg| y\right]$$

निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (3.5) वैध है।

$Re(\lambda_1)>0, Re(\lambda_2)>0, \mu>0, v>0, Re(\rho+\mu(d_i/\delta_i))>0 \ (i=1, \ldots, m_2)$

$Re(\sigma+v(f_jF_j))>0, (j=1, \ldots m_3)$ तथा अनुभाग 1 में दिये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों।

तथा (ii) जब $\alpha=\beta=n_1=0$, तो

$$\phi(p, q)=pq \ \lambda_1^{-\sigma} \ \lambda_2^{-\sigma} \ H_1^*\left[\xi\left(\frac{p}{\lambda_1}\right)^{\mu}, \eta\left(\frac{q}{\lambda_2}\right)^{v}\right] \tag{5.4}$$

जहाँ $H_1^*[x, y]$ दो चरों वाला H फलन है जिसका उल्लेख (5.3) में $n_1=0$ के साथ हुआ है। (5.4) के वैधता के प्रतिबन्ध वे हैं जो (5.3) में $\alpha=\beta=n_1=0$ के साथ हैं।

अब जब $\alpha>0, \beta>0$, तो

$$\psi_2(k, l)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p^{-k-1} q^{-l-1} \phi(p, q) \, dp \, dq$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p^{-k} q^{-l} (\alpha p+\lambda_1)^{-\sigma} (\beta q+\lambda_2)^{-\sigma} H_1\left[\xi\left(\frac{p}{p\alpha+\lambda_1}\right)^{\mu}, \eta\left(\frac{q}{\beta q+\lambda_2}\right)^{v}\right]$$

जब $\alpha=\beta=n_1=0$, तो

$$\psi_2(k, l)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p^{-k} q^{-l} \lambda_1^{-\rho} \lambda_2^{-\sigma} H_1^*\left[\xi\left(\frac{p}{\lambda_1}\right)^{\mu}, \eta\left(\frac{q}{\lambda_2}\right)^{v}\right] dp \, dq \tag{5.6}$$

समाकल (5.5) तथा (5.6) का मान ज्ञात करने के लिये पहले दो चरों वाले H-फलन के लिये कंटूर निरूपण लिखते हैं, समाकल के क्रम को परिवर्तित करते हैं और तब परिणाम [5, p. 310, eq. (19)] तथा रीड के प्रमेय [24 p. 565] की सहायता से क्रमशः p-तथा q-समाकल का मान ज्ञात करते है जिससे दोनों दशाओं में

$$\psi_2(k, l)=\frac{\Gamma(\rho+k-1)\Gamma(\sigma+l-1)}{\lambda_1^{\rho+k-1} \ \lambda_2^{\sigma+l-1}} \psi_1(k, l) \tag{5.7}$$

की प्राप्ति होती है जहाँ $\psi_1(k, l)$ को (3.4) के द्वारा दिखाते हैं यदि $\alpha>0, \beta>0$ और $\alpha=\beta=n_1=0$ होने पर (3.5) द्वारा व्यक्त करते हैं।

$\alpha>0$, $\beta=0$ होने पर (5.7) की वैधता के प्रतिबन्ध हैं :

$\mu>0, v>0, Re(\lambda_1)>0, Re(\lambda_2)>0, Re(\rho)>, Re(\sigma)>\theta,$

$Re(-\sigma'+\mu d_i/\delta_l)+1)>0\ (i=1, ..., m_2), Re(-\sigma''+v(f_j/F_j)+1)>0\ (=1, ..., m_3)$

$U'=U+\mu>0, V'=V+v>0, R'=R+\mu<0, S'=S+v<0,$

$$|\arg \xi\left(\frac{p}{\alpha p+\lambda_1}\right)^{\mu}|<(\tfrac{1}{2})U'\pi \text{ तथा } |\arg \eta\left(\frac{q}{\beta q+\lambda_2}\right)^{v}<(\tfrac{1}{2})V'\pi.$$

जब कि $\alpha=\beta=n_1=0$ होने पर

$\mu>0,\ v>0,\ Re(\lambda_1)>0, Re(\lambda_2)>0,\ Re(\rho)>0, Re(\sigma)>0,\ U'>0, V'>0,$ ($n_1=0$ के साथ)
$R'<0, S'<0, |\arg \xi| <(\tfrac{1}{2})U'\pi, |\arg \eta|<(\tfrac{1}{2})V'\pi$ ($n_1=0$ के साथ)

$Re(\mu(c_i-1)/\gamma_i+1(<\sigma'<Re(\mu(d_j/\delta_j)+1)$

$1\leqslant i\leqslant n_2 \qquad 1\geqslant j\leqslant m_2$

$Re(v(e_i-1)/E_j+1)<\sigma''<Re(v(f_j/F_j)+1)$

$1\leqslant i\leqslant n_3 \qquad 1\leqslant j\leqslant m_3$

अतः दोनों ही दशाओं में

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma''-i\infty}^{\sigma'+i\infty}\int_{\sigma''-i\infty}^{\sigma'+i\infty}\frac{\psi_2(k, l)\, x^{-k}\, y^{-l}}{\psi_1(k, l)}\,dk\,dl$$

$$=\frac{-1}{\lambda_1^{\rho-1}\lambda_2^{\sigma-1}4\pi^2}\int_{\sigma''-i\infty}^{\sigma'+i\infty}\int_{\sigma''-i\infty}^{\sigma'+i\infty}\Gamma(\rho+k-1)\,\Gamma(l+\sigma-1)\,(\lambda_1 x)^{-k}\,(\lambda_2 y)^{-l}\,dk\,dl$$

$$=\frac{1}{\lambda_1^{\rho-1}\lambda_2^{\sigma-1}}\,G_{0,\,1}^{1,\,0}\left[\lambda_1 x\,\middle|\,\begin{matrix}-\\ \rho-1\end{matrix}\right]\,G_{0,\,1}^{1,\,0}\left[\lambda_2 y\,\middle|\,\begin{matrix}-\\ \rho-1\end{matrix}\right]$$ (5, *p*. 353, eq. (43); p. 307; eq. (2) का प्रयोग करने पर)

$=x^{\rho-1}\,y^{\sigma-1}\,e^{-\lambda_1 x}\,e^{-\lambda_2 y}$ ज्ञात परिणाम (4, p. 209, eq. (8); 27, p. 142)

$=f(x, y)$

अतः प्रतिलोमन सूत्र (3.2) की पुष्टि हो जाती है।

इसी प्रकार का उदाहरण अनुभाग 4 में आये संगत एकाकी *L-H* परिवर्त के प्रतिलोमन सूत्र के समर्थन में दिया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक द्वय-राजस्थान विश्वविद्यालय के गणित विभाग के डा० के० सी० शर्मा के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में अपने सुझावों के द्वारा उपकृत किया है।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1965, **31A**, 536-46.
2. भिसे, वी० एम०, **जर्न० विक्रम यूनि० इंडिया** 1959, 3, 57-63.
3. बोस, एस० के० तथा मेहरा, ए० एन०, **गणित**, 1958, 9
4. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions **भाग** I, **मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1953
5. वही, Tables of Integral Transforms **भाग** I **मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954
6. गोयल, एस० पी०, Portugaliae Math. Lisbon (प्रकाशनाधीन)
7. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के०, जर्न० आस्ट्रेलियन मैथ० सोसा०, 1970, **11**, 142-48
8. वही, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस**, 1972, **75A** 117-23.
9. गुप्ता, के० सी०, तथा जैन, यू० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस, इंडिया**, 1966, **36A**, 594-601
10. जैन, एन० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1969, **39A**, 366-72
11. जायसवाल, एम० पी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1968, **11**, 211-18.
12. कपूर, वी० के० तथा मसूद, एस०, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1968, **64**, 399-406
13. कुलश्रेष्ठ, एस० के०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1967, **37A**, 25-31
14. मैनरा, वी० पी०, **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा० इंडिया**, 1961, **13**, 23-31

15.16. माइजर, सी० एस० Proc. Konk. Nederland Akad. Wetensch. 1940-1941 **43 & 44**. 569-608 तथा 727-37.

17. मित्तल, पी० के० तथा गोयल, एस० पी०, Univ. Studies in Maths., Univ. of Rajasthan, 1973, **3**, 1-9.
18. मुकर्जी, एस० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1962, **5**, 49-56.
19. निगम, एच० एन० Acta Math, 1963, **14**, 331-42.
20. पाठक, आर० एस० तथा सिंह, के० के०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1968, **11**, 235-41
21. राठी, पी० एन०, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 1965, **79A**, 41-46.

22. राजेन्द्र स्वरूप, **वही**, 1964, **78**, 105-112.

23. रामकुमार, **गणित**, 1954, **5**

24. रीड, एल० एस०, Duke Math. Journal., 1944, **11**, 565-72.

25. शर्मा, के० सी०, Math. Zeitschr., 1965, **89**, 94-97.

26. सिंह, आर०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1962, **39A**, 149-150.

27. सिंह, एफ० तथा श्रीवास्तव, बी० एम०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1973, **16**, 139-46.

28. श्रीवास्तव, एच० एम० Math. Zeitschr. 1968, **108**, 197-201.

29. वर्मा, आर० एस०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1951, **20A**, 209-16.

30. वर्मा, आर० यू०, **वही**, 1969, **39A**, 265-67.

31. वही, **गणित**, 1967, **18**, 8-12.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January 1977, Pages 23-24

बाजरा (पैनिसिटम टाइफाइडिस एस० एण्ड एच०) के पौधों के आधार में पाये जाने वाले एन्थोसायनिन रंग की वंशागति का अध्ययन

आर० पी० यादव
वनस्पति विज्ञान विभाग, श्री वार्ष्णेय कालेज, अलीगढ़

[प्राप्त—जनवरी 2, 1976]

सारांश

बाजरा (पैनिसिटम टाइफाइडिस एस० एण्ड एच०) के पौधों के आधार में पाये जाने वाले एन्थोसायनिन रंग की वंशागति एकजीनी प्रभावी होती है।

Abstract

Inheritance of anthocyanin pigmentation in the bases of the plants of the pearl-millet (pennisetum typhoides S. and H.). *By* R. P. Yadav, Department of Botany, S. V. College, Aligarh.

Inheritance of anthocyanin pigmentation in the plant bases of the pearl-millet is monogenic dominant.

अनेक अनुसन्धानकर्त्ताओं ने बाजरे के कुछ गुणात्मक लक्षणों का आनुवंशिक अध्ययन किया है।[1, 2, 3, 5, 6] परन्तु बाजरे के तने के आधार में उपस्थित एन्थोसायनिन रंग की आनुवंशिकता का उल्लेख अभी तक नहीं हुआ है।

बाजरे की दो प्रजातियों (बी० एस०-1 तथा बी० एस०-3 को जिनके तने के आधार में लाल रंग होता है) एक तीसरी प्रजाति (बी० एस०-2, जिसके तने के आधार में एन्थोसायनिन रंग नहीं होता है) से संकरण कराया गया। एफ-1, एफ-2 तथा दोनों ही संकर पूर्वज संकरों का अध्ययन सन् 1970 में राजा बलवन्त सिंह कालेज के कृषि फार्म पर किया गया।

इस लक्षण के लिये वंशागति की प्रकृति का अध्ययन एफ-1, एफ-2 तथा संकर पूर्वज संकरों में किया गया। एफ-1 संतति के आँकडों से पता चलता है कि एन्थोसायनिन रंग की उपस्थिति एक प्रभावी

लक्षण है। एफ-2 तथा संकर पूर्वज संकरों की सन्ततियों में पृथक्करण का विस्तार से उल्लेख सारणी-1 में किया गया है।

सारणी 1

एफ-2 और परीक्षण संकर में पृथक्करण और उसके लिये X^2– तथा P-का मान

संकर	पृथक्करण		X^2– का मान		P-का मान	
	एफ-2 में	परीक्षण संकर में	एफ-2 में	परीक्षण संकर में	एफ-2 में	परीक्षण संकर में
बी० एस०-1×बी० एस०-2	85 रंगीन 33 रंग रहित	56 रंगीन 62 रंग रहित	0·269	0·994	70-50	50-30
बी० एस०-1×बी० एस-०2	67 रंगीन 21 रंग रहित	41 रंगीन 38 रंग रहित	0·590	0·162	50-30	70-50

एफ-2 की संतति में 3 रंगीन तथा 1 रंगरहित पौधों के अनुपात में पृथक्करण होता है तथा इसके परीक्षण संकर में 1:1 के अनुपात में पृथक्करण से संपुष्टि होती है। इन सभी परिणामों से यह सिद्ध होता है कि बाजरे के पौधे के आधार में उपस्थित एन्थोसायनिन रंग एकजीनी प्रभावी लक्षण है। यह लक्षण उन्नतिशील जातियों के प्रजनन में एक सांकेतिक लक्षण का कार्य भी कर सकता है।

निर्देश

1. गिल, बी० एस०, **इन्डियन जर्न० जेनेटि०**, 1969, **29**, 468
2. सिंह, धरमपाल, मिश्रा, एस० एन०, सिंह, ए० बी० तथा सिंह, एस० पी०, **वही**, 1967, **27**, 426
3. सिंह, डी०, लाल, एस० तथा यादव, एच० आर०, **जर्न० इन्डियन बोट० सोसा०**, 1968, **47**, 388
4. सिंह, डी०, लाल, एस० तथा सिंह, आर० एस०, **वही**, 1969, **48**, 135
5. यादव, आर० पी०, **वही**, 1971, **50**, 252
6. यादव, आर० पी०, **करेन्ट साइन्स**, 1976, **45**(5), 197

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January 1977, Pages 25-33

फूरिये गुणांकों का अनुक्रम

वाई० बी० शुक्ला
गवर्नमेंट साइंस कालेज, रीवाँ

[प्राप्त—जुलाई 6, 1976]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में गेर्गेन प्रकार की अभिसरण कसौटी का उपयोग करते हुये अनुक्रम $\{nB_n\}$ के लिये सिंह के फल का सार्वीकरण किया है।

Abstract

On the sequence of Fourier coefficients. *By* Y. B. Shukla, Department of Mathematics, Government Science College, Rewa.

In this note we have generalized the result of Singh for sequence $\{nB_n\}$ in another direction using Gergen type convergence criterion.

1·1. **परिभाषा**

एक अनन्त टोप्लिट्ज़ मैट्रिक्स दिया गया है

$$T=\{(a_{n,k})\}(n=0, 1, 2, \ldots; k=0, 1, 2, \ldots)$$

अनुक्रम $\{S_n\}$ के T-परिवर्त t_n निम्न प्रकार से परिभाषितहोते हैं

$$t_n=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k \tag{1.1.1}$$

बशर्ते कि दाहिनी पक्ष की समस्त श्रेणियाँ अभिसारी हों। यदि $t_n \to s$ ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, तो यह कहा जाता है कि S_n की T-सीमा S है तथा अनुक्रम $\{S_n\}$ को T-प्रक्रम द्वारा योगफल S में संकलनीय कहा जाता है। सिलवरमान टोप्लिट्ज प्रमेय[1] द्वारा $a_{n,k}$ के वे प्रतिबन्ध दिये जाते हैं जो T को नियमित या T-मैट्रिक्स बनाते हैं। (1.1.1) किसी सान्त सीमा S (ज्यों-ज्यों $n \to \infty$) की ओर अग्रसर हो इसके लिये आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध (जब भी $s_n \to s$) ये हैं

$$R_n=\Sigma \mid a_{n,k} \mid < R \tag{1.1.2}$$

जहाँ R n से स्वतन्त्र है

$$a_{n,k} \to 0 \tag{1.1.3}$$

ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, प्रत्येक k के लिये तथा

$$\Sigma\, a_{n,k} \to 1 \tag{1.1.4}$$

ये प्रतिबन्ध इस दृष्टि से आवश्यक हैं कि यदि ये तुष्ट नहीं होते तो अनुक्रम $\{S_n\}$ S में अभिसारी होगा किन्तु उसकी T-सीमा S नहीं होगी।

जब $\{S_n\}$ के स्थान पर $\{S_n'\}$ रखकर प्रतिबन्ध (1.1.1) की तुष्टि की जाती है तो अनुक्रम $\{S_n\}$ को सेसैरो प्रक्रम के द्वारा योगफल S में संकलनीय कहा जाता है जहाँ $\{S_n'\}$ से अनुक्रम $\{S_n\}$ का प्रथम कोटि का nवाँ सेसैरो माध्य व्यक्त होता है।

2·1 प्रस्तावना

माना कि $f(t)$ एक फलन है जो लेबेस्क के अनुसार $(-\pi, \pi)$ अन्तराल में समाकलनीय है और इस अन्तराल के बाहर अपनी आवर्तता के कारण परिभाषित है। माना कि $t=x$ पर $f(t)$ का फूरिये श्रेणी

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty} A_n(x) \tag{2.1.1}$$

है तो (2.1.1) की संयुग्म श्रेणी होगी :

$$\sum_{n=1}^{\pi} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{1}^{\infty} B_n(x) \tag{2.1.1}$$

फेजर[2] ने प्रदर्शित किया है कि यदि $l = f(x+0) - f(x-0)$ का अस्तित्व हो और सान्त हो तो अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ $\frac{l}{\pi}$ मान तक संकलनीय (c, ν), $\nu > 1$ है और यदि $f(x)$ परिबद्ध विचरण वाला हो तो प्रमेय $\nu > 0$ के लिये सत्य है। यह भी सिद्ध किया गया है कि यदि l का अस्तित्व रहे और सान्त हो तो अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ प्रथम लागैरिथ्मिक माध्य के द्वारा उसी योगफल[8] तक संकलनीय है।

आब्रचकाफ[5] ने दिखाया है कि यदि $f(x)$ समाकलनीय L हो और यदि $\frac{|\psi(t)|}{t}$ $t=0$ के निकट संकलनीय हो तो $n^{-1} \sum_{1}^{n} rB_r(x) \to \frac{l}{\pi}$, जहाँ $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$

मोहन्ती तथा नन्दा[4] ने एक प्रमेय सिद्ध किया है जो फूरिये श्रेणी के लिये हार्डी तथा लिटिलवुड अभिसरण मानदण्ड के समान है। वस्तुतः उन्होंने सिद्ध किया है कि

प्रमेय :

यदि $$\psi(t)=0\left\{\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1}\right\} as \to 0. \tag{2.1.3}$$

तथा a_n और b_n बराबर $O(n^{-\delta}), 0<\delta<1$, तो अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ योग (l/π) में संकलनीय $(c, 1)$ है।

यही नहीं, सिंह[6] ने इसी फल को लेबेस्क के मानदण्ड से सिद्ध किया है। सिंह के फल का और भी सार्वीकरण हिरोकावा[3] ने किया है। यह फल सुनूची[7] द्वारा प्रदत्त अभिसरण मानदण्ड के समान है। इस टिप्पणी में हम सिंह के फल को एक अन्य दिशा में सार्वीकृत करेंगे। वास्तव में हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय :

यदि $$\Psi(t)=\int_0^t \psi(u)\,du=O(t^{\triangle}) \tag{2.1.4}$$

तथा

$$\lim_{k,n\to\infty}\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\frac{|\psi(u+\pi/n)-\psi(u)|}{u}\,du=o(1) \tag{2.1.5}$$

तो अनुक्रम$\{nB_n(x)\}$ संकलनीय समस्त $\triangle\geqslant 1$ के लिये l/π मान तक संकलनीय $(c, 1)$ है तथा k कोई धन पूर्णांक है जो काफी मन्द गति से अनन्त की ओर अग्रसर होता है।

3.1. हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी :

प्रमेयिका 1:

यदि $$I=\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\frac{\psi(t)\sin nt}{t^2}\,dt,\; I_2'=\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\frac{\psi(t)\sin nt}{t(t+\pi/n)}\,dt$$

तथा $\psi(t)$ से (2.1.4) हो तो $I-I'=O\left(\frac{n}{k}\right)^{2-\triangle/\triangle}$ ज्यों ज्यों $n\to\infty,\ \triangle\geqslant 1.$

उपपत्ति :

$$\begin{aligned}I-I' &= \int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\psi(t)\left\{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t(t+\pi/n)}\right\}\sin nt\,dt\\ &=\frac{\pi}{n}\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\frac{\psi(t)\sin nt}{t^2(t+\pi/n)}\,dt\\ &=\frac{\pi}{n}\left[\left\{\frac{\Psi(t)\sin nt}{t^2(t+\pi/n)}\right\}_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}-\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\Psi(t)\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin nt}{t^2(t+\pi/n)}\right\}dt\right]\end{aligned}$$

खण्डश: समाकलन करने पर

$$=\frac{\pi}{n}\left\{O(t^{\triangle})\frac{\sin nt}{t^2(t+\pi/n}\right\}_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}-\frac{\pi}{n}\left[\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta} O(t^{\triangle})\,O\left\{\frac{n}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right\}dt\right]$$

(2.1.4) के प्रयोग से

$$=O(1)-O\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\sin n(k\pi/n)^{1/\triangle}}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{2/\triangle}\left[\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{1/\triangle}+\frac{\pi}{n}\right]}-\frac{\pi}{n}O\left[O\left(\frac{nt^{\triangle-2}}{\triangle-2}\right)+O\left(\frac{t^{\triangle-3}}{\triangle-3}\right)\right]_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}$$

$$=O(1)+O\left(\frac{n}{k}\right)^{3-\triangle/\triangle}-\frac{\pi}{n}\;O\left[\;O\left(n\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{t-2/\triangle}\right)+O\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{\triangle-3/\triangle}\right]$$

$$=O\left(\frac{n}{k}\right)^{2-\triangle/\triangle}$$

इससे प्रमेयिका सिद्ध हुई।

प्रमेयिका 2 :

यदि $\psi(t)$ से (2.1.4) की तुष्टि हो तो $\int_{\alpha}^{\alpha+k\pi/n}\frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt=O(1)$ प्रत्येक $\alpha\geqslant 0$, तथा k के लिये।

उपपत्ति :

यदि $\alpha\geqslant 0$, तो प्रमेयिका समाकल $\int\psi(t)\,dt$ के सातत्य अंश का अनुगमन करती है। यदि $\alpha=0$, तो खण्डश: समाकलन करने पर स्पष्ट होगा कि

$$\left|\int_0^{k\pi/n}\frac{\psi(t)}{t}\cos nt\,dt\right|=\left|\left[\Psi(t)\frac{\cos nt}{t}\right]_0^{k\pi/n}-\int_0^{k\pi/n}\Psi(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos nt}{t}\right)dt\right|$$

$$=O(1)+\int_0^{k\pi/n}O(t^{\triangle})\;O\left[n^2+\frac{1}{t^2}\right]dt=O(1)+O\left[O\left(\frac{n^2t^{1+\triangle}}{1+\triangle}\right)+O\left(\frac{t^{\triangle-1}}{\triangle-1}\right)\right]_0^{k\pi/n}$$

$$=O(1)$$

प्रमेयिका 3 :

यदि $\psi(t)$ से (2.1.4) तथा (2.1.5) की तुष्टि हो तो

$$J=\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\frac{\psi(t)\,e^{int}}{t(t+\pi/n)}\,dt=O\left(\frac{n}{k}\right)^{2-\triangle/\triangle}$$

उपपत्ति :

$$J=\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\frac{\psi(t)\,e^{int}}{t(t+\pi/n)}dt=\left[\int_{\eta}^{\eta+\pi/n}+\int_{\eta+\pi/n}^{\delta}\right]\frac{\psi(t)\,e^{int}}{t(t+\pi/n)}\,dt$$

$$=J_1+J_2, \text{ माना, जहाँ } \eta=\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{1/\triangle}.$$

अब

$$J_1=\int_{\eta}^{\eta+\pi/n}\frac{\psi(t)e^{int}}{t(t+\pi/n)}dt=\frac{1}{\eta+2\pi/n}\int_{\eta}^{\xi}\frac{\psi(t)e^{int}}{t}$$

$$=\frac{1}{\eta+2\pi/n}\cdot O(1)=O\left(\frac{n}{k}\right)^{1/\triangle} \quad \text{(प्रमेयिका 2 से)} \tag{3.1.1}$$

तथा

$$J_2=\int_{\eta+\pi/n}^{\delta}\frac{\psi(t)e^{int}}{t(t+\pi/n)}dt=\int_{\eta}^{\delta-\pi/n}\frac{\psi(t+\pi/n)e^{in(t+\pi/n)}}{(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}$$

$$=-\int_{\eta}^{\delta-\pi/n}\frac{\psi(t+\pi/n)e^{int}}{(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}dt=-\left[\int_{\eta}^{\delta}-\int_{\delta-\pi/n}^{\delta}\right]\frac{\psi(t+\pi/n)e^{int}}{(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}dt$$

$$=-\int_{\eta}^{\delta}\frac{\psi(t+\pi/n)e^{int}}{\eta(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}dt+O(1) \quad \text{(प्रमेयिका 2 से)} \tag{3.1.2}$$

इस प्रकार

$$2J=\int_{\eta}^{\delta}\frac{\psi(t)e^{int}}{t(t+\pi/n)}dt+J_1+J_2$$

$$=\int_{\eta}^{\delta}\left\{\frac{\psi(t)e^{int}}{t(t+\pi/n)}-\frac{\psi(t+\pi/n)e^{int}}{(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}\right\}dt+O\left(\frac{n}{k}\right)^{1/\triangle}$$

$$=\int_{\eta}^{\delta}\frac{[\psi(t)-\psi(t+\pi/n)]e^{int}}{(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}dt+\frac{2\pi}{n}\int_{\eta}^{\delta}\frac{\psi(t)e^{int}}{t(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}dt+O\left(\frac{n}{k}\right)^{1/\triangle}$$

$$=J_3+J_4+O\left(\frac{n}{k}\right)^{1/\triangle}, \text{ माना}$$

अब (2.1.5) के प्रयोग करने पर

$$|J_3|\leqslant\frac{1}{\eta+\pi/n}\int_{\eta}^{\delta}\frac{|\psi(t+\pi/n)-\psi(t)|}{t}dt=O\left(\frac{n}{k}\right)^{1/\triangle}$$

खण्डशः समाकलन करने पर

$$J_4=\frac{2\pi}{n}\left[\frac{\Psi(t)e^{int}}{t(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}\right]_{\eta}^{\delta}-\frac{2\pi}{n}\int_{\eta}^{\delta}\Psi(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{int}}{t(t+\pi/n)(t+2\pi/n)}\right)dt$$

$$=O(1)-O\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left[\frac{\eta^{\triangle}e^{int}}{\eta^3(1+\pi/n\eta)(1+2\pi/n\eta)}\right]-\frac{2\pi}{n}O\left[\int_{\eta}^{\delta}t^{\triangle}O\left\{\frac{n}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right\}dt\right]$$

$$=O(1)-O(1)-\frac{2\pi}{n}\,O\Big[\,O\Big(\frac{nt^{\triangle-2}}{\triangle-2}\Big)+O\Big(\frac{t^{\triangle-3}}{\triangle-3}\Big)\Big]_{\eta}^{\delta}$$

$$=O(1)-O(1)-O(1)+O\Big(\frac{2\pi}{n}\Big)\Big[O\,\Big(\frac{n\eta^{\triangle-2}}{\triangle-2}\Big)+O\Big(\frac{\eta^{\triangle-3}}{\triangle-3}\Big)\Big]$$

$$=O(1)+O\Big(\frac{n}{k}\Big)\frac{2-\triangle}{\triangle}+O\Big(\frac{n}{k}\Big)^{3-\triangle/\triangle}=O\Big(\frac{n}{k}\Big)\frac{2-\triangle}{\triangle}$$

इस प्रकार $J=O\Big(\frac{n}{k}\Big)^{(2-\triangle)/\triangle}$ । इस तरह प्रमेयिका सिद्ध हुई ।

4·1. प्रमेय की उपपत्ति

मोहन्टी तथा नन्दा[4] के अनुसार

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\,rB_r(x)-\frac{l}{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x-t)-l\}\,g(n,\,t)\,dt+O(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)g(n,\,t)\,dt+O(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\,P+O(1), \text{ माना कि}$$

जहाँ
$$g(n,\,t)=-\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\,(\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt)$$

$$=-\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\Big[\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})t-\sin\frac{1}{2}t}{2\,\sin\frac{1}{2}t}\Big]$$

$$=-\frac{1}{2n}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\sin nt}{\tan\frac{1}{2}t}+\cos nt-1\Big)$$

$$=-\frac{\sin nt}{4n\,\sin^2\frac{1}{2}t}-\frac{\cos nt}{2\tan\frac{1}{2}t}+\tfrac{1}{2}\sin nt$$

इस तरह
$$P=\int_0^{\pi}\psi(t)g(n,\,t)\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\psi(t)\,\Big\{\frac{\sin nt}{4n\,\sin^2\frac{1}{2}t}-\frac{\cos nt}{2\,\tan\frac{1}{2}t}\Big\}+\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\psi(t)\,\sin\,nt\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\psi(t)\Big\{\frac{\sin nt}{nt^2}-\frac{\cos nt}{t}\Big\}\,dt+O(1)$$

$$=\left[\int_0^\delta+\int_0^\pi\right]\left\{\frac{\sin nt}{nt^2}-\frac{\cos nt}{t}\right\}\psi(t)\,dt$$

$$=\int_0^\delta \psi(t)h(n,t)\,dt+O(1)$$

रीमान-लेबेस्क प्रमेय के द्वारा जहाँ एक स्थिर संख्या है तथा

$$h(n,t)=\frac{\sin nt}{nt^2}-\frac{\cos nt}{t}.$$

हमें निम्नांकित आंकड़ों की आवश्यकता होगी :

$$h(n,t)=O(n^2t),\ 0<t<\frac{\pi}{n} \tag{4.1.1}$$

$$=O\left(\frac{1}{t}\right),\ \frac{\pi}{n}<t<\pi$$

हम इस प्रकार रखेंगे कि

$$P=\int_0^\delta \psi(t)h(n,t)\,dt+O(1)$$

$$=\left[\int_0^{(k\pi/n)}+\int_{(k\pi/n)}^{(k\pi/n)^{1/\triangle}}+\int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta}\right]\psi(t)h(n,t)\,dt+O(1)$$

$$=P_1+P_2+P_3+O(1) \text{ माना जहाँ } \triangle\geqslant 1. \tag{4.1.2}$$

अब खण्डशः समाकलन करने तथा (2.1.4) और (4.1.1), का उपयोग करने पर

$$P_1=\int_0^{k\pi/n}\psi(t)h(n,t)\,dt$$

$$=\Big[\Psi(t)h(n,t)\Big]_0^{k\pi/n}-\int_0^{k\pi/n}\Psi(t)\frac{d}{dt}(h(n,t))\,dt$$

$$=\Big[O(t^\triangle)O(n^2,t)\Big]_0^{k\pi/n}=(O)\left[\int_0^{k\pi/n}(t^\triangle)O\left(\frac{d}{dt}n^2t\right)dt\right]$$

$$=O\left[\frac{(k\pi)^{1+\triangle}}{n^{1+\triangle}}\cdot n^2\right]+O(1)-O(n^2)O\left[\frac{t^{1+\triangle}}{1+\triangle}\right]_0^{k\pi/n}$$

$$=O\left(\frac{k^{1+\triangle}}{n^{\triangle-1}}\right)=O(1),\ \text{जैसे}\ n\to\infty \tag{4.1.3}$$

तथा

$$P_2=\int_{k\pi/n}^{(k\pi/n)^{1/\triangle}}\psi(t)h(n,t)\,dt=\int_{k\pi/n}^{(k\pi/n)^{1/\triangle}}\psi(t)O\left(\frac{1}{t}\right)dt \text{ (4.1.1) के प्रयोग से}$$

$$=\left[\Psi(t)O\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{k\pi/n}^{(k\pi/n)^{1/\Delta}}-\int_{k\pi/n}^{(k\pi/n)^{1/\Delta}}\Psi(t)O\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$$ खण्डशः समाकलन करने पर

$$=O\left[t^{\Delta}O\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{k\pi/n}^{(k\pi/n)^{1/\Delta}}+\left[\int_{k\pi/n}^{(k\pi/n)^{1/\Delta}}O(t^{\Delta-2})\,dt\right]$$ (2.1.4) के प्रयोग से

$$=O\left[O\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{1-1/\Delta}-O\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{\Delta-1}\right]+O\left[O\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{\Delta-1/\Delta}+O\left(\frac{k\pi}{n}\right)^{\Delta-1}\right]$$

$=O(1)$, जैसे $n\to\infty$ (4.1.4)

अन्त में $$P_3=\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\psi(t)\left[\frac{\sin nt}{nt^2}-\frac{\cos nt}{t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{n}\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t)\sin nt}{t^2}dt-\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\psi(t)\frac{\cos nt}{t}dt$$

$$=\frac{1}{n}\left[\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t)\sin nt}{t(t+\pi/n)}dt+\left(\frac{n}{k}\right)^{2-\Delta/\Delta}\right]-\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t)\cos nt}{t}dt$$

प्रमेयिका 1 के प्रयोग से

$$=-\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t)\cos nt}{t}dt+O(1),$$ प्रमेयिका 3 के द्वारा (4.1.5)

$$=-\left[\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{(k\pi/n)^{1/\Delta}}+\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}+\pi/n}^{\delta+\pi/n}-\int_{\delta}^{\delta+\pi/n}\right]\frac{\psi(t)\cos nt}{t}dt+O(1)$$

$$=-\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}+\pi/n}^{\delta+\pi/n}\frac{\psi(t)\cos nt}{t}dt+O(1),$$ प्रमेयिका 2 से

$$=\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t+\pi/n)\cos(t+\pi/n)\,.\,n}{t+\pi/n}dt+O(1)$$

$$=\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t+\pi/n)}{t+\pi/n}\,.\cos nt\,dt+O(1) \quad (4.1.6)$$

(4.1.3) तथा (4.1.4) से

$$P_3=\tfrac{1}{2}\left[\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t)\cos nt}{t}dt-\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t+\pi/n)}{t+\pi/n}\cos nt\,dt+O(1)\right]$$

अतः (2.1.5) एवं प्रमेयिका 3 के प्रयोग से

$$|P_3|=\tfrac{1}{2}\left|\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\left\{\frac{\psi(t+\pi/n)}{t+\pi/n}-\frac{\psi(t)}{t}\right\}\cos nt\,dt\right|+O(1)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left|\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t+\pi/n)-\psi(t)}{t+\pi/n}\cos nt\,dt-\frac{\pi}{n}\int_{(k\pi/n)^{1/\Delta}}^{\delta}\frac{\psi(t)\cos nt}{t(t+\pi/n)}dt\right|$$

$$+O(1)$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta} \frac{|\psi(t+\pi/n)-\psi(t)|}{t} dt + \frac{\pi}{n} \left| \int_{(k\pi/n)^{1/\triangle}}^{\delta} \frac{\psi(t) \cos nt}{t(t+\pi/n)} dt \right| + O(1)$$

$$= O(1) + \frac{\pi}{2n} \left(\frac{n}{k}\right)^{2-\triangle/\triangle} + O(1)$$

$$= O(1) \tag{4.1.7}$$

फल (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4) एवं (4.1.7) को एकत्र करने पर $P = O(1)$

अतः $\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} rB_r(x) - \frac{l}{\pi} = O(1)$ जिससे प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० एस० एस० दीक्षित का अत्यन्त ऋणी है जिन्होंने इस प्रपत्र के लेखन में प्रोत्साहन और सहायता की।

निर्देश

1. कुक, आर० जी०, Infinite matrices and Seque.nce spaces, **मैकमिलन**, 1950.
2. फेजर, एल०, Jour. reine angew Math., 1913, **142**, 165-168.
3. हिरोकावा, एच०, Kodia Math. Seminar report, 1958, **8**, 1-8.
4. मोहन्टी, आर० तथा नन्दा, एम०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1954, **5**, 79-84.
5. आब्रेचकाफ, एन०, Annuaire Universite de Sofia, 1 Faculte |Physico Mathematique Livere 1, 1943, **39**, 821-880.
6. सिंह, वी०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1956, 7, 796-803.
7. सुनूची, जी०, Tohoku Math. Journ., 1953, **5**, 238-242.
8. ज़िगमुंड, ए०, Trigonometrical Series, **वार्सा** 1935, पृष्ठ 55, 62.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January 1977, Pages 35-39

$\Gamma(2rz)$ के लिये नवीन द्विगुणन सूत्र*

बी० एम० अग्रवाल तथा बी० एम० सिंहल
गणित विभाग, गवर्नमेंट साइंस कालेज, ग्वालियर

[प्राप्त—जनवरी 20, 1976]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य $\Gamma(2rz)$ के लिये द्विगुणन सूत्र ज्ञात करना और इसका उपयोग विशेष रूप से फाक्स के H-फलन हेतु एक वियोजन सूत्र प्राप्त करना है ।

Abstract

A new duplication formula for Γ(2rz)*. *By* B. M. Agrawal and B. M. Singhal, Department of Mathematics, Government Science College, Gwalior, M. P.

In this note, we have derived a new duplication formula

$$\Gamma(-2rs)=\frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{r\pi s}{2}\right)}\cdot\sqrt{\pi}\cdot 2^{-2rs-1}\cdot e^{-i(r-1/2)\pi s}$$

$$\times\left\{\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\Gamma(-rs)\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(\frac{1}{2}+ks)\Gamma(\frac{1}{2}-ks)}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\Gamma(-rs)\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(1+ks)\Gamma(-ks)}\right)^2\right\}^{1/2},$$

1. प्रस्तावना

माइजर के G-फलन के लिये वियोजन सूत्र सिद्ध करने हेतु कार्लसन[1] ने एक सरल सर्वसमिका

$$\Gamma(-s)\Gamma(\tfrac{1}{2}-s)=\pi e^{\pm i\pi s}\left[\frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}\pm i\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\Gamma(1+s)}\right]. \tag{1}$$

प्रयुक्त की है । इसकी सरलता से प्रभावित होकर श्रेणी रूप में $\Gamma(2rz)$ के लिये एक वियोजन सूत्र खोज निकालने की इच्छा हुई ।

---

*Presented by the second author at the second convention of M. P. Vigyan Academy at Rewa.

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य $\Gamma(2rz)$ के द्विगुणन सूत्र ज्ञात करना है और इसका उपयोग विशेष रूप में फाक्स के H-फलन के लिये वियोजन सूत्र प्राप्त करना है जो विशिष्टतः कार्लसन के फल में समानीत हो जाता है [1, p. 237 (30)]।

अब निम्न पर विचार करने पर

$$\frac{\sin\left(\frac{r\pi s)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \mathrm{F}^{\pm i 1/2(r+1)\pi s} = \sum_{k=1}^{r} (\cos k\pi s \pm i \sin k\pi s),$$

इसकी पुष्टि होती है कि

$$\Gamma(-rs)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-rs) = \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{r\pi s}{2}\right)} \pi e^{\pm i(r+1/2)\pi s}$$

$$\times \sum_{k=1}^{r} \left[\frac{\Gamma(-rs)\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(\frac{1}{2}+ks)\Gamma(\frac{1}{2}-ks)} \pm i \frac{\Gamma(-rs)\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(1+ks)\Gamma(-ks)}\right]. \tag{2}$$

(1) में s के स्थान पर rs रखने पर

$$\Gamma(-rs)\Gamma(\tfrac{1}{2}-rs) = \pi e^{\pm ir\pi s}\left[\frac{\Gamma(-rs)}{\Gamma(\frac{1}{2}+rs)} \pm i \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(1+rs)}\right]. \tag{3}$$

अब माना कि

$$\left.\begin{aligned} R_1 \cos\phi_1 &= \frac{\Gamma(-rs)}{\Gamma(\frac{1}{2}+rs)} \\ \mathrm{R}_1 \sin\phi_1 &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(1+rs)} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

तथा
$$R_2 \cos\phi_2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{\Gamma(-rs)\,\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(\frac{1}{2}+ks)\Gamma(\frac{1}{2}-ks)};\ R_2 \sin\phi_2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{\Gamma(-rs)\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(1+ks)\Gamma(-ks)} \tag{5}$$

तो (2) तथा (3) के दाहिने पक्षों के वास्तविक तथा कल्पित अंशों की तुलना करने पर

$$\phi_1 = \phi_2 = -rs\pi$$

R_1 तथा R_2 की गणना (4) तथा (5) से करने तथा (2) के सम्प्रयोग से

$$\Gamma(-2rs)=\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\sin\frac{r\pi s}{2}}\cdot\sqrt{\pi}\,2^{-2rs-1}\,e^{-i(r-1/2)\pi s}$$

$$\times\left\{\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\Gamma(-rs)\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(\frac{1}{2}+ks)\Gamma(\frac{1}{2}-ks)}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{\Gamma(-rs)\Gamma(\frac{1}{2}-rs)}{\Gamma(1+ks)\Gamma(-ks)}\right)^2\right\} \tag{6}$$

$$S\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots\ .$$

प्राप्त होता है, जो अभीष्ट फल है।

(6) में $r=1$ तथा s के स्थान पर $-z$ रखने पर यह एक रोचक द्विगुणन सूत्र में समानीत हो जाता है:

$$\Gamma(2z)=\sqrt{\pi}\,2^{2z-1}\left\{\left(\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{2}-z)}\right)^2+\left(\frac{F(\frac{1}{2}+z)}{\Gamma(1-z)}\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{7}$$

2. इस अनुभाग में हम फाक्स के H-फलन के लिये वियोजन सूत्र प्राप्त करेंगे।

हम H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं[3]

$$H_{p,\ q}^{m,\ n}\left(z\middle/\begin{matrix}\{(a_p,\ e_p)\}\\ \{(b_q,\ f_q)\}\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}\,z^s\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\psi(s)\,z^s\,ds$$

इसमें रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है; $0\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant n\leqslant p$; समस्त e तथा f धन हैं, L बार्नीज प्रकार का ऐसा उपयुक्त कंटूर है कि $\Gamma(b_j-f_js),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ के पोल कंटूर के दाईं ओर और $\Gamma(1-a_j+e_js),\ i=1,\ \ldots,\ n)$, के पोल बाईं ओर पड़ें। प्राचलों इस प्रकार परिभाषित हैं कि (3) के दाईं ओर का समाकल अभिसारी होता है। अब H-फलन की परिभाषा से तथा (2) को व्यवहृत करने पर

$$H_{p,\ q+2}^{m+2,\ n}\left(z\middle/\begin{matrix}\{(a_p,\ e_p)\}\\ \{(o,\ r)(\frac{1}{2},\ r),\ \{(b_q,f_q)\}\end{matrix}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\left[\pi\; H^{m+3,\, n+1}_{p+3,\, q+5}\left(e^{\pm(r+1/2)i\pi}\, z\middle/\begin{matrix}(1, r/2), \{(a_p, e_p)\}, (\tfrac{1}{2}, k), (1, \tfrac{1}{2})\\ (o, r), (\tfrac{1}{2}, r), (1, r/2), \{(b_q, f_q)\}, (\tfrac{1}{2}, k), (1, \tfrac{1}{2})\end{matrix}\right)\right.$$

$$\left.\pm i\pi\, H^{m+3,\, n+1}_{p+3,\, q+5}\left(e^{\pm(r+1/2)i\pi}\, z\middle/\begin{matrix}(1, r/2), \{(b_q, e_p)\}, (o, k), (1, \tfrac{1}{2})\\ (o, r), (\tfrac{1}{2}, r), (1, r/2), \{(b_q, f_q)\}, (o, k), (1, \tfrac{1}{2})\end{matrix}\right)\right] \quad (9)$$

यही नहीं; द्विगुणन सूत्र के उपयोग से

$$H^{m+1,\, n}_{p,\, q+1}\left(z\middle/\begin{matrix}\{(a_p, e_p)\}\\ (o, r), \{(b_q, f_q)\}\end{matrix}\right)$$

$$=2^{\sigma}\pi^{\rho-1}\, H^{2m+2,\, 2n}_{2p,\, 2q+2}\left(\frac{z^2}{4^t}\middle/\begin{matrix}\{(a_p/2, e_p)\}, \{(a_p+1/2, e_p)\}\\ (o, r), (\tfrac{1}{2}, r), \{(b_q/2, f_q)\}, \left\{\frac{b_q+1}{2}, f_q\right\}\end{matrix}\right) \quad (10)$$

जहाँ

$$\left.\begin{aligned}\rho &= \tfrac{1}{2}(p+q+1)-m-n,\\ \sigma &= \sum_{j=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{p} a_j+p-m-n,\\ &\text{तथा}\\ \epsilon &= \sum_{j=1}^{q} f_j-\sum_{j=1}^{p} e_j+r\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

अब (9) तथा (10) से तुरन्त निम्नांकित की प्राप्ति होती है:

$$H^{m+1,\, n}_{p,\, q+1}\left(z\middle/\begin{matrix}\{(a_p, e_p)\}\\ (o, r), \{(b_q, f_q)\}\end{matrix}\right)=2^{\sigma}\pi^{\rho}\sum_{k=1}^{r}\left[H^{2m+3,\, 2n+1}_{2p+3,\, 2q+5}\left(e^{\pm(r+1/2)i\pi}\frac{z^2}{4^t}\middle/\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(1, r/2), \{(a_p/2, e_p)\}, \left\{\left(\frac{a_p+1}{2}, e_p\right)\right\}, (\tfrac{1}{2}, k), (1, \tfrac{1}{2})\\ (o, r), (\tfrac{1}{2}, r), (1, r/2), \{(b_q/2, f_q)\}, \left\{\left(\frac{b_q+1}{2}, f_q\right)\right\}, (\tfrac{1}{2}, k), (1, \tfrac{1}{2})\end{matrix}\right)\pm i\, H^{2m+3,\, 2n+1}_{2p+3,\, 2q+5}$$

$$\left.\left(e^{\pm(r+1/2)i\pi}\frac{z^2}{4^t}\middle/\begin{matrix}(1, r/2), \{(a_p/2, e_p)\}, \left(\left\{\frac{a_p+1}{2}, e_p\right)\right\}, (o, k), (1, \tfrac{1}{2})\\ (o, r), (\tfrac{1}{2}, r), (1, r/2), \{(b_q/2, f_q)\}, \left(\left\{\frac{b_q+1}{2}\right)\right\}, f_q)\}, (o, k), (1, \tfrac{1}{2})\end{matrix}\right)\right], \quad (12)$$

$r=1=e_i=f_j;\ i=1, \ldots, p, j=1, \ldots, q$, रखने पर सूत्र (12) कार्लसन के सूत्र[1] के तुल्य हो जाता है:

$$G^{m+1,\, n}_{p,\, q+1}\left(z\middle/\begin{matrix}(a)\\ o, (b)\end{matrix}\right)=2^{\sigma}\pi^{\rho}\; G^{2m+1,\, 2n}_{2p,\, 2q+2}\left(e^{\pm i\pi}\frac{z^2}{4^{\delta}}\middle/\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2})\\ o, (\tfrac{1}{2}b, \tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}), \tfrac{1}{2}\end{matrix}\right]$$

$$-2^{\sigma-\delta}\pi^{\rho}\, z\, G^{2m+1,\, 2n}_{dp,\, 2q+2}\left(e^{\pm i\pi}\frac{z^2}{4^{\delta}}\middle/\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2})\\ o, (\tfrac{1}{2}b, \tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}), -\tfrac{1}{2}\end{matrix}\right), \quad (13)$$

जहाँ ρ एवं σ को (11) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा

$$\delta = q + 1 - p.$$

निर्देश

1. कार्लसन, बी० सी०, SIAM, J. Math. ANAL. 1970, **1**, 232-242
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions. **भाग I, मेकग्राहिल न्यूयार्क** 1953
3. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961 **98**, 395-429

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January 1977, Pages 41-50

दाब का धातु-अर्धचालक यांत्रिक स्पर्शों में अवकल प्रतिरोध-वोल्टता तथा अवकल धारिता-वोल्टता लक्षणों पर प्रभाव

विपिन कुमार, सीताराम तथा राम परशाद
राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला, नई दिल्ली-110012

[प्राप्त—जून 3, 1976]

सारांश

धातु अर्धचालक प्रकार के यांत्रिक स्पर्शों में दाब का प्रभाव अवकल प्रतिरोध व धारिता-वोल्टता लक्षणों पर अध्ययन किया गया है। यहाँ प्राप्त किये गये लक्षण अन्य लेखकों द्वारा वाष्पीकरण द्वारा बनाये सिलिकन के धातु-ग्राक्साइड-अर्धचालक स्पर्शों में प्राप्त किये गये लक्षणों से मिलते हैं। यह पाया गया है कि अंतर-पृष्ठ अवस्थाओं का अर्धचालक पट्ट अंतराल में ऊर्जा के सापेक्ष वितरण दाब के साथ बदल जाता है। जरमेनियम तथा गैलियम आर्सेनाइड स्पर्श के लिये प्राप्त किये गये लक्षण आर्द्रता के साथ बदल जाते हैं। पी-प्रकार जरमेनियम पर प्राप्त किये गये लक्षण विशेष रूप से असंगत हैं। दाब द्वारा प्राचीर ऊँचाई में कमी होने का कोई स्पष्ट प्रभाव नहीं मिल पाया है।

Abstract

Effect of pressure on differential resistance and differential capacitance versus voltage characteristics of metal-semiconductor mechanical contacts. *By* Vipin Kumar, Sita Ram and Ram Parshad, National Physical Laboratory, New Delhi.

The effect of pressure on differential resistance and differential capacitance versus voltage characteristics of metal-semiconductor mechanical contacts has been studied. The characteristics obtained here resemble those obtained by other authors for evaporated metal-oxide-semiconductor contacts on silicon. It has been found that the distribution of interface states in the forbidden gap of the semiconductor with respect to energy changes with pressure. The characteristics obtained for germanium and gallium arsenide contacts change with humidity. The characteristics obtained for *p* type germanium are specially anomalous. There is yet no definite proof of decrease in barrier height with increase in pressure.

पिछले पत्रों[1–3] में दाब का प्रभाव धातु-अर्धचालक स्पर्शों के ओहमिक गुणों पर प्रतिवेदन किया गया था। वहाँ यह सिद्ध करने का प्रयत्न किया गया था कि दाब के प्रभाव के कारण या तो धातु तथा अर्धचालक के बीच यांत्रिक आकाश की मोटाई कम हो जाती है अथवा धारा वाहक का पृष्ठ अवस्थाओं में स्थानीकरण कम हो जाता है। इस प्रकार सुरंगीकरण प्रक्रिया द्वारा धारा वहन के लिये एक पृष्ठ अवस्था सक्रिय हो जाती है। इन गुणों का आगे अध्ययन करने के लिये इस पत्र में अवकल प्रतिरोध वोल्टता तथा अवकल धारिता-वोल्टता लक्षणों का अवलोकन किया गया है। जैसा कि बेनडेनियल तथा ड्यूक[4] ने संकेत किया है, अवकल चालकता $\frac{dI}{dV}$ अर्धचालकता के फर्मी तल μ से ऊर्जा V द्वारा दूर प्राप्य अवस्था घनत्व के सीधे अनुपाती है, अर्थात्

$$\frac{dI}{dV} \propto \eta_s(\mu - V)$$

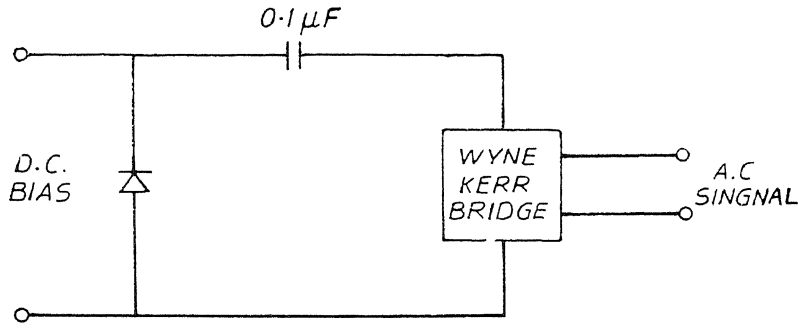
इसी प्रकार त्सुइ[5] के अनुसार अवकल धारिता, पृष्ठ पर आवेश का पट्ट झुकाव-विभव के सापेक्ष विचरण मापती है; अर्थात्

$$c = \frac{dQ}{dU}$$

जहाँ Q दिक्-आवेश प्रदेश में कुल आवेश तथा U पृष्ठ पर पट्ट-झुकाव-विभव है। वर्तमान दशा में चूँकि वाहकों के लिये प्राप्य अवस्थाएँ अर्धचालक पृष्ठ अवस्थाएँ हैं अतः यहाँ मापा गया अवकल प्रतिरोध एक विशेष ऊर्जा पर सुरंगीकृत वाहकों के लिये प्राप्य पृष्ठ अवस्थाओं के व्युत्क्रम अनुपात में है।

उपरोक्त प्रकार के अवकल प्रतिरोध तथा धारिता-वोल्टता लक्षणों का धा०-आ०-अर्ध प्रकार के स्पर्शों के लिये वाक्समैन इत्यादि[6] द्वारा अवलोकन किया गया है। इन लेखकों के अनुसार विभिन्न धातुओं द्वारा स्पर्श के लिये अर्धचालक के वर्जित पट्ट अंतराल में ऊर्जा के सापेक्ष अलग-अलग पृष्ठ अवस्था वितरण प्राप्त होते हैं। इसका एक कारण यह हो सकता है कि धातु का अर्धचालक पृष्ठ में विसरण हो जाता है। प्रस्तुत पत्र में चूंकि यांत्रिक धातु-अर्धचालक का स्पर्श प्रयोग किया गया है, अतः धातु के, जो वर्तमान प्रयोगों में टंगस्टन है, अर्धचालक में विसरण की संभावना बहुत कम हो जाती है।

प्रयोगात्मक

जिन अर्धचालकों का यहाँ प्रयोग किया गया है उनमें मुख्यतः सिलिकन है। इसके अतिरिक्त जरमेनियम तथा गैलियम आर्सेनाइड का प्रयोग भी किया गया है। स्पर्श बनाने की विधि पूर्व पत्र[1] में दी गयी है। सिलिकन तथा जरमेनियम के स्पर्शों में पृष्ठ को लैपिंग के बाद रासायनिक निक्षारण द्वारा तैयार किया गया। अ० प्र०-वोल्टता तथा अ० धा०-वोल्टता लक्षण मापने के लिये वाइन-कैर ब्रिज का प्रयोग $100K \cdot H_z$ से $2M \cdot H_z$-आवृत्ति तक किया गया। प्रयोग में लाया गया सरल परिपथ चित्र (1) में दिया गया है।

चित्र 1 : वर्तमान प्रयोगों में वाइन-कैर ब्रिज के लिये उपयोग किया गया सरल परिपथ

सिलिकन : एन- तथा पी- प्रकार सिलिकन के लिये अ० प्र० तथा अ० धा०-वोल्टता लक्षण केवल पग्रिम नति में खींचे गये हैं। विपरीत नति में स्पर्श युक्ति का प्रतिरोध इतना बढ़ जाता है तथा वोल्टता के साथ उसका परिवर्तन इतना कम हो जाता है कि ब्रिज की सुग्राहिता समाप्त हो जाती है। इसी प्रकार विपरीत नति में युक्ति की धारिता बहुत कम हो जाती है जिसका वोल्टता के साथ विचरण मापना इस ब्रिज द्वारा कठिन हो जाता है।

चित्र (2) में पी-प्रकार सिलिकन (प्रतिरोधिता 1Ω से०मी०) वाले स्पर्श के लिये अ०प्र०-वोल्टता लक्षण विभिन्न आवृत्तियों 100K·H_z, 500 K·H_z तथा 1·5 M·H_z पर दो दाबों 50 ग्राम तथा 100 ग्राम के लिये मापे गये हैं। चित्र से स्पष्ट है कि अपेक्षाकृत लघु आवृत्तियों जैसे 100 K·H_z पर अ०प्र० का वोल्टता के साथ अधिक विचरण होता है। उच्चतर आवृत्तियों के लिये शून्य वोल्टता पर स्पर्श का अ० प्र० अपेक्षाकृत कम हो जाता है। इसके अतिरिक्त लघुतर आवृति 100 K·H_z पर अ० प्र० का एक नियत वोल्टता पर निम्निष्ठ प्राप्त होता है जो इस तथ्य का परिचायक हो सकता है कि लघुतर आवृत्तियों पर पृष्ठ अवस्था घनत्व में शिखर प्राप्त होता है।

चित्र (3) में उपरोक्त प्रकार के स्पर्श के लिये अ० धा०-वोल्टता लक्षण समान प्राचरों के लिये खींचे गये हैं। चित्र के अनुसार 100K·H_z आवृति पर अ० धा० असामान्य रूप से अधिक हो जाती है। इसके अतिरिक्त, अ० धा० का उच्चिष्ठ लगभग 0·8 वोल्ट पर है जबकि चित्र (2) के अनुसार अ० प्र० निम्निष्ठ लगभग 0·5 वोल्ट पर है। इस अंतर की विवेचना में व्याख्या करने का प्रयास किया गया है।

चित्र (4) में पी-सिलिकन (प्रतिरोधिता 1Ω से० मी०) वाले स्पर्श के लिये ही अ० प्र०-वोल्टता लक्षणों का दाब के साथ विचरण दिखाया गया है। यहाँ पर प्रयोग की गयी आवृति 300K·H_z है। इस चित्र के अनुसार दाब बढ़ाने पर पृष्ठ अवस्था घनत्व में शिखर स्पष्ट हो जाता है जो दाब बढ़ाने पर लघुतर वोल्टता की ओर बढ़ता है। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि जैसे-जैसे फर्मी तल ने अल्पसंख्या वाहक पट्ट की ओर बढ़ते हैं, पृष्ठ अवस्था घनत्व बढ़ता जाता है और एक नियत वोल्टता

VOLTAGE (VOLTS) ⟶

⟵ VOLTAGE (VOLTS) FOR P=100 gms.

RESISTANCE (KΩ)

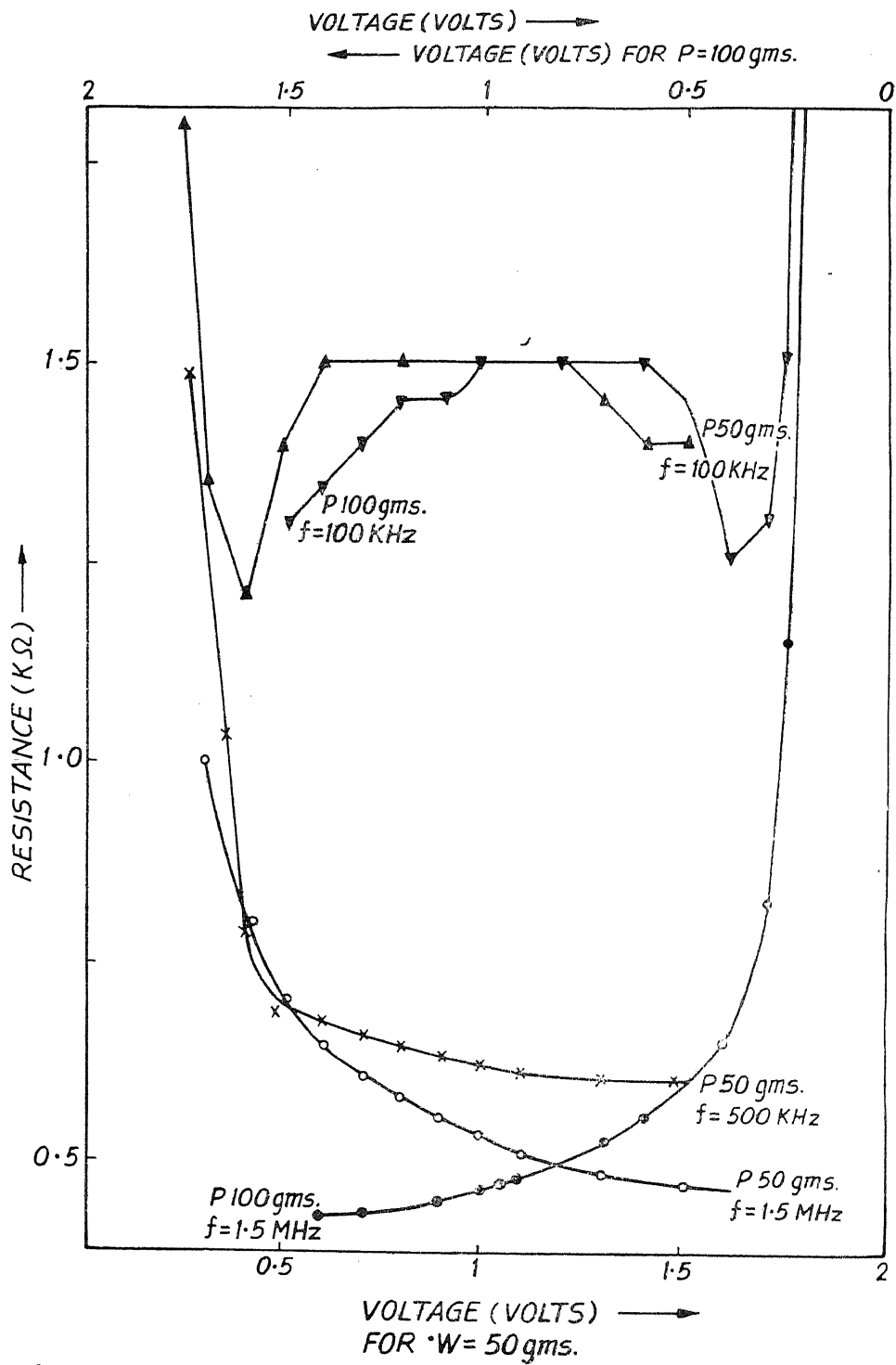
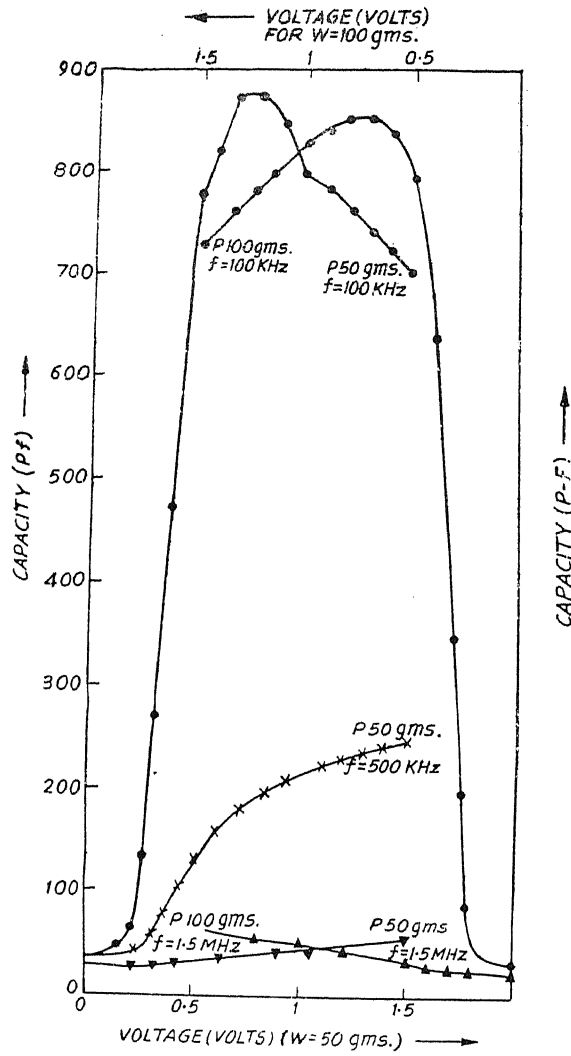
P50gms. f=100KHz

P100gms. f=100KHz

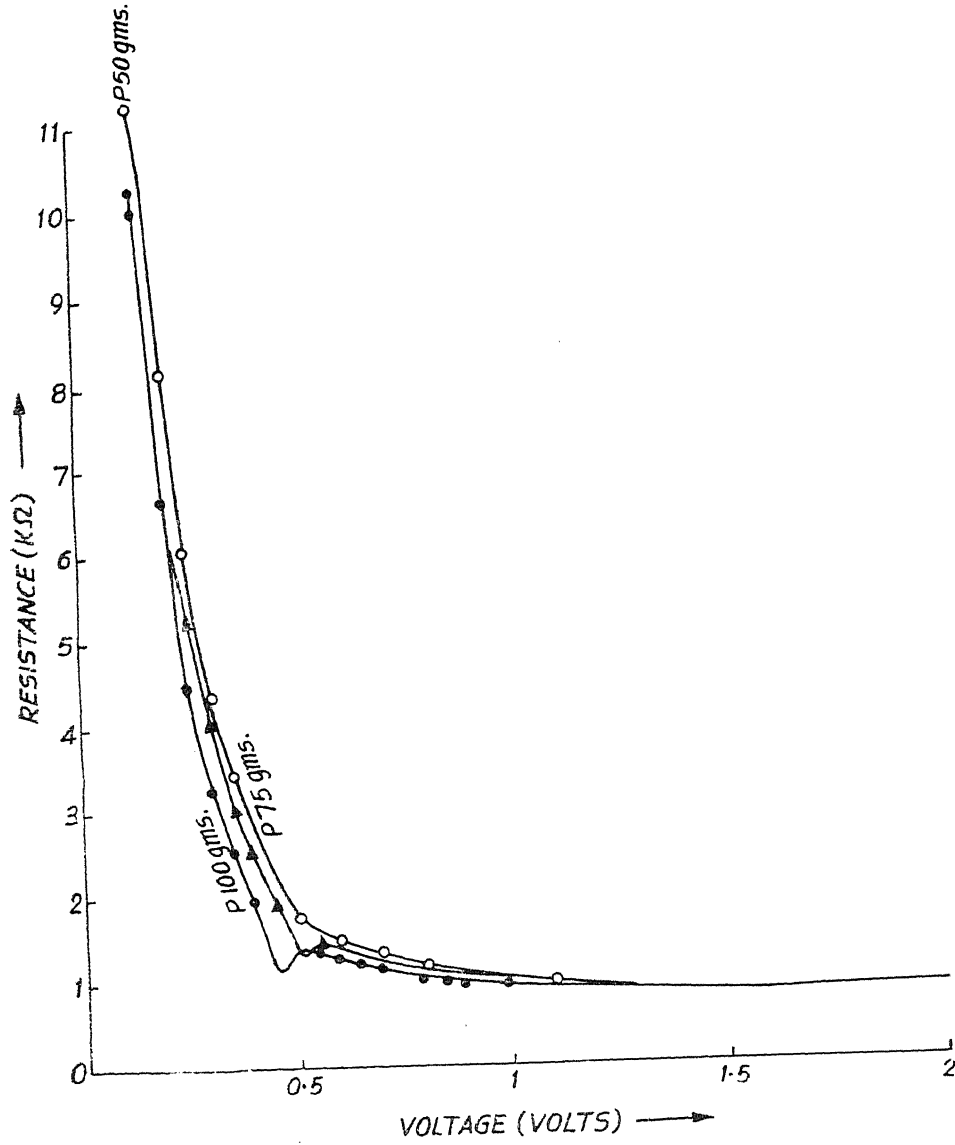
P 50 gms. f=500 KHz

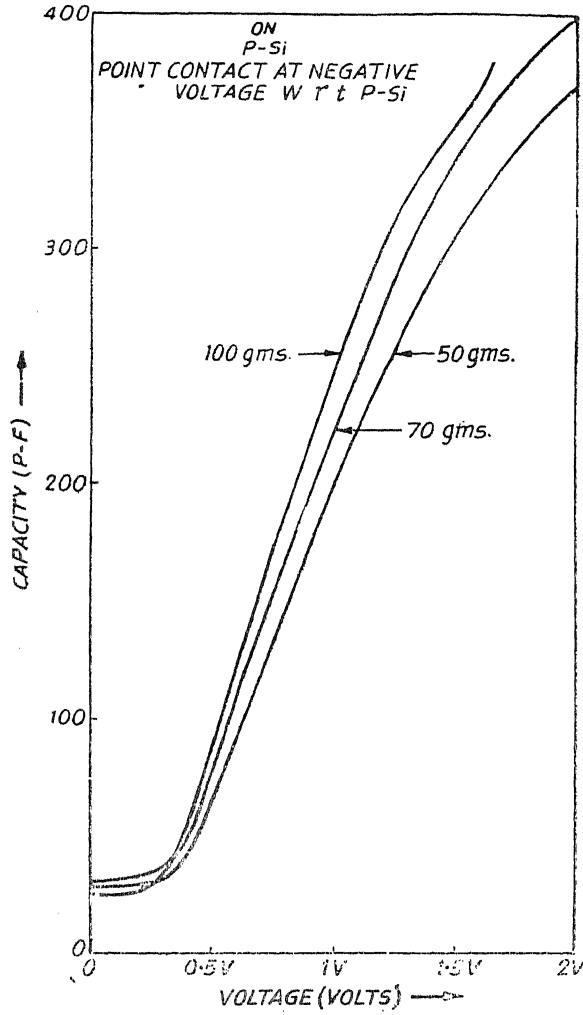
P 50 gms. f=1·5 MHz

P100gms. f=1·5 MHz

VOLTAGE (VOLTS) ⟶
FOR W=50 gms.

चित्र 2: पी-सिलिकन (प्रतिरोधिता 1·0 Ωसे० मी०) स्पर्श के लिये अ० प्र०-वोल्टता लक्षणों का आवृत्ति के साथ विचरण। दो दाबों 50 ग्राम तथा 100 ग्राम का उपयोग किया गया है।

चित्र 3 : पी-सिलिकन (प्रतिरोधिता 1·0 Ω से० मी०) वाले स्पर्श के लिये अ०धा० वोल्टता का आवृत्ति के साथ विचरण । दो दाबों 50 ग्राम तथा 100 ग्राम का प्रयोग किया गया है।

पर लगभग स्थिर हो जाता है । जैसा चित्र (4) में दिखाया गया है, एक नियत वोल्टता से अधिक के लिये अ० प्र० का दाब के साथ विचरण समाप्त हो जाता है जो इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि नियत वोल्टता के बाद स्थानीकृत पृष्ठ अवस्था धनत्व समाप्त हो जाता है ।

चित्र (5) में इसी स्पर्श के लिये तथा समान प्राचरों के लिये अ० धा० का दाब के साथ विचरण मापा गया है । अभी इस चित्र के कोई परिणाम निकालना संभव नहीं हो पाया है ।

चित्र 4 : पी-सिलिकन (प्रतिरोधिता 2 Ω से० मी०) वाले स्पर्श के लिये अ० प्र०-वोल्टता लक्षणों का दाब के साथ विचरण। 300 K.H$_z$ आवृत्ति का प्रयोग किया गया है।

एन-प्रकार सिलिकन के लिये भी लगभग उपरोक्त प्रकार के लक्षण प्राप्त होते हैं। उच्च प्रतिरोधिता एन-प्रकार सिलिकन (प्रतिरोधिता $\sim 10^3 \Omega$ से० मी०) वाले स्पर्श के लिये आवृति निर्भरता लघु प्रतिरोधिता वाले सिलिकन स्पर्शों के समान ही है लेकिन लक्षण निष्कोण नहीं हैं।

चित्र 5 : पी-सिलिकन (प्रतिरोधिता 2Ω से० मी०) स्पर्श के लिये अ० वा० वोल्टता लक्षणों का दाब के साथ विचरण । आवृत्ति 300 K.H_z का प्रयोग किया गया है ।

100 K·H_z आवृत्ति पर अ० प्र० एक निम्निष्ठ प्राप्त करने के बाद फिर अधिक होना प्रारंभ हो जाता है । जैसे 25 ग्राम दाब के लिये अ० प्र० निम्निष्ठ लगभग 2 वोल्ट पर 17 KΩ है जबकि 18 वोल्ट पर बढ़कर 40 KΩ हो जाता है । दाब बढ़ाने पर 2 वोल्ट से कम वोल्टता के लिये अ० प्र० का मान अधिक नहीं बदलता । लेकिन 2V से अधिक वोल्टता के अ० प्र० के आरोहण करते हुए भाग पर दाब का प्रभाव अधिक होता है और वक्र के इस भाग की प्रवणता कम हो जाती है । जैसे 100 ग्राम दाब के लिये 18 वोल्ट पर अ० प्र० का मान लगभग 23KΩ रह जाता है ।

एक अन्य एन-सिलिकन (प्रतिरोधिता 2·3Ω से० मी०) स्पर्श के लिये वर्धित मणित्र का सिलिंड्रिकल आकृति वाला पृष्ठ प्रयुक्त किया गया। ऐसे स्पर्श के लिये अग्रिम नति में अ० प्र० तथा अ० धा०-वोल्टता लक्षण अन्य प्रकार के पृष्ठ के समान ही थे लेकिन इन लक्षणों पर दाब का कोई प्रभाव नहीं हुआ। पिछले पत्र[3] में ऐसे ही स्पर्श के लिये वाहक जीवन काल पर दाब का प्रभाव प्रतिवेदन किया गया था। इस प्रकार वर्तमान प्रकार के अवलोकनों का गुण पिछले अवलोकन से मिलता है। लेकिन ऐसे स्पर्श में धारा-वोल्टता लक्षणों पर दाब का सामान्य प्रभाव होता है।

इसके अतिरिक्त लघु आवृत्ति 200H_z पर भी उपरोक्त प्रकार के अ० प्र० वोल्टता लक्षण मापे गये हैं। अग्रिम नति में आवृत्तियों 100 K·H_z इत्यादि पर अ० प्र० निम्निष्ठ की तरह लघुतर आवृत्तियों पर ऐसा कोई निम्निष्ठ प्राप्त नहीं होता और अ० प्र० का मान वोल्टता बढ़ाने पर घटता जाता है। विपरीत नति में अ० प्र० का वोल्टता के साथ विचरण नहीं होता। ऐसी लघुतर आवृत्तियों के लिये अ० प्र०-वोल्टता लक्षणों पर दाब का प्रभाव अध्ययन नहीं किया गया है।

जरमेनियम : जरमेनियम के स्पर्शों के लिये अ० प्र०-वोल्टता तथा अ० धा०- वोल्टता लक्षण समय अथवा आर्द्रता के साथ बदलते हैं। एन-प्रकार जरमेनियम के लिये अग्रिम तथा विपरीत नति में वाहन-केर ब्रिज को संतुलित करना अज्ञात कारणों से संभव नहीं हो पाया। इसकी पुष्टि की गयी है कि ऐसा किसी तकनीकी दोष के कारण नहीं बल्कि जरमेनियम पृष्ठ के स्वयं किसी गुण के कारण है। पी-प्रकार जरमेनियम के लिये विचित्र लक्षण प्राप्त हुए। यद्यपि समय के साथ ऐसे लक्षण पुनः प्राप्त नहीं किये जा सके फिर भी उदाहरण के लिये यहाँ वर्णन किया जा रहा है।

जब धातु स्पर्श पी-जरमेनियम की अपेक्षा धनात्मक विभव पर होता है तो आवृत्ति का अ० प्र०-वोल्टता लक्षणों पर विशेष प्रभाव नहीं पड़ा। प्रयोग की गई आवृत्तियाँ 100K·H_z, 500K·H_z तथा 1·5M·H_z थीं। अ० प्र० का मान वोल्टता बढ़ाने पर कम होता था जैसा कि सामान्यतः सिलिकन के लिये होता है। ऐसे अ० प्र०-वोल्टता लक्षणों पर दाब का प्रभाव भी सामान्य था।

समान नति में ही ऐसे स्पर्शों में अ० धा० का मान ऋणात्मक था। दूसरे शब्दों में स्पर्श धारिता-प्रकार के बदले प्रेरक-प्रकार का था। ऐसे स्पर्शों की धारिता मापने के लिये उनके समांतर एक नियत मान का धारित्र जोड़ा गया। वोल्टता बढ़ाने पर परिपथ की कुल धारिता कम हो जाती थी जबकि स्पर्श की स्वयं की धारिता बहुत कम है-जैसे 2 p.F.। उदाहरणार्थ, परिपथ की शून्य वोल्टता पर प्रारंभिक धारिता लगभग 225 p.F. थी जबकि 0·3 वोल्ट पर यह घटकर 50 p.F. रह गयी। ऋणात्मक धारिता-वोल्टता लक्षण लघु आवृत्तियों जैसे 100 K.H_z पर अधिक स्पष्ट थे तथा आवृत्ति बढ़ाने पर धारिता के ऋणात्मक मान में कमी हो जाती थी। दाब का धारिता-वोल्टता लक्षणों पर विशेष प्रभाव नहीं पाया गया।

जब धातु स्पर्श पी-जरमेनियम के सापेक्ष ऋणात्मक विभव पर है तो अ० प्र०-वोल्टता लक्षणों में एक नियत आवृत्ति 300K.H_z पर दाब का प्रभाव मापा गया है। वोल्टता बढ़ाने पर अ० प्र० का मान बढ़ जाता था जो और अधिक वोल्टता बढ़ाने पर एक संतृप्त अ० प्र० मान की ओर अग्रसर होता

था। दाब लगाने पर अ० प्र० का मान कम हो जाता है। अ० धा० मान में वोल्टता के साथ कोई परिवर्तन नहीं हुआ।

गैलियम आर्सेनाइड : गैलियम आर्सेनाइड वाले स्पर्शों में भी आर्द्रता का प्रभाव बहुत अधिक है। एक समय पर प्राप्त किये गये लक्षणों को पुनः प्राप्त करना कठिन है। एन-प्रकार गैलियम आर्सेनाइड वाले स्पर्शों का क्रमबद्ध अध्ययन नहीं किया गया है। फिर भी, अग्रिम नति में अ० प्र०-वोल्टता बढ़ाने पर कम होता है जबकि अ० धा० का मान थोड़ा बढ़ता है। विपरीत नति में वोल्टता का अ० प्र० तथा अ० धा० मान पर कोई प्रभाव नहीं होता है। पी-प्रकार गै० आ० स्पर्शों में अ० प्र० का मान अग्रिम तथा विपरीत दोनों नतियों में वोल्टता बढ़ाने पर कम होता है लेकिन प्राप्त किये गये लक्षणों की वक्रता सिलिकन वाले स्पर्शों में प्राप्त किये गये लक्षणों की वक्रता से उल्टी दिशा में है। आवृत्ति तथा दाब का प्रभाव सिलिकन वाले स्पर्शों की तरह है। अ० धा० का मान वोल्टता के साथ अधिक नहीं बदलता है। जहाँ सिलिकन स्पर्शों में शून्य वोल्टता पर अ० प्र० मान में दाब के साथ परिवर्तन हो जाता है, गैलियम आर्सेनाइड की दशा में ऐसा नहीं होता।

विवेचना

एन- तथा पी- सिलिकन वाले स्पर्शों के लिये प्राप्त किये गये अ० प्र० तथा अ० धा० लक्षणों की तुलना करने पर पता चलता है कि अ० प्र० का निम्निष्ठ लगभग 0·5 वोल्ट पर है जबकि अ० धा० का उच्चिष्ठ लगभग 0·8 वोल्ट पर है। यह असंगत प्रतीत होता है। जैसा कि भूमिका में कहा जा चुका है, अ० प्र०-वोल्टता लक्षणों द्वारा एक नियत ऊर्जा पर प्राप्य अवस्था घनत्व का आभास होता है जबकि अ० धा० द्वारा द्विक-आवेश-प्रदेश में कुल आवेश या पृष्ठ पर पट्ट-झुकाव-विभव के सापेक्ष विचरण प्राप्त होता है। इस प्रकार यह मान सकते हैं कि 0·5 वोल्ट पर अ० प्र० निम्निष्ठ से पृष्ठ अवस्था वितरण का उच्चिष्ठ प्राप्त होता है। लेकिन पृष्ठ अवस्था वितरण यहीं समाप्त नहीं होता है और इस कारण पृष्ठ विभव अभी भी वोल्टता बढ़ाने पर कम होता है। जैसा कि चित्र (3) से स्पष्ट है, 0·5 वोल्ट के बाद अ० धा०-वोल्टता लक्षण की प्रवणता कम हो जाती है, जो इस तथ्य का परिचायक हो सकता है कि पृष्ठ विभव का वोल्टता के साथ विचरण पहले जैसी दर से नहीं है। लेकिन अ० धा० में उच्चिष्ठ प्राप्त होने के बाद कमी होने का कारण अभी स्पष्ट नहीं है।

चित्र (4) के आधार पर यह कहा जा सकता कि कम दाब पर पृष्ठ अवस्था वितरण निष्कोण रहता है। जैसे-जैसे दाब बढ़ाते हैं यह वितरण एक उच्चिष्ठ प्राप्त कर लेता है लेकिन इससे दाब के साथ पृष्ठ विभव निम्नन के लिये कोई निष्कर्ष निकालना कठिन होगा।

चित्र (2) के आधार पर यह कहा जा सकता है कि पृष्ठ अवस्था वितरण शिखर केवल लघु आवृत्तियों पर ही प्राप्त होती है। उच्चतर आवृत्तियों पर पृष्ठ अवस्था वितरण निष्कोण है और कोई विचरण उच्चिष्ठ प्राप्त नहीं होता है। दाब बढ़ाने पर लघु वोल्टताओं पर उच्चतर आवृत्तियों के लिये पृष्ठ अवस्था घनत्व बढ़ जाता है जिसका अर्थ होगा कि दाब बढ़ाने पर पृष्ठ अवस्थाएँ अर्धचालक फर्मी तल की ओर स्थांतरित होती हैं।

गैलियम आर्सेनाइड वाले स्पर्शों से अ० धा० का वोल्टता के साथ बहुत कम विचरण यह संकेत करता है कि गैलियम आर्सेनाइड में पृष्ठ अवस्थाएँ आवेशित अवस्था में नहीं होतीं। लेकिन इस आधार पर अ० प्र० के वोल्टता के साथ विचरण की व्याख्या कठिन हो जाती है।

अ० धा० का दाब के साथ परिवर्तन केवल पतले अंतर-पृष्ठ आक्साइड तह के लिये ही सीमित नहीं है। जैसा कि गाडभीव[7] ने दिखाया है, मोटी आक्साइड तह के लिये भी अ० धा० में दाब के साथ परिवर्तन होता है।

उपसंहार

उपरोक्त अवलोकन पिछले पत्र[3] में अल्पसंख्या वाहक जीवन काल पर दाब का प्रभाव से सहमति रखते हैं और यह सिद्ध करते हैं कि दाब प्रभाव केवल धातु तथा अर्धचालक के बीच यांत्रिक आकाश की मोटाई कम करने में ही नहीं है, बल्कि अंतर पृष्ठ दावों पर भी दाब का प्रभाव होता है। इस प्रकार धारा-वोल्टता लक्षणों में परिवर्तन यांत्रिक आकाश मोटाई तथा अंतर पृष्ठ दोनों के गुणों में परिवर्तनों के मिलने से होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

उपलब्ध सुविधाओं के उपयोग की अनुमति देने के लिये लेखक निदेशक, रा० भौ० प्र० के प्रति कृतज्ञता-ज्ञापन करते हैं। एक लेखक (वि० कु०) परमाणु ऊर्जा विभाग, बम्बई के प्रति अनुसंधान फेलोशिप प्रदान करने के लिये आभार प्रकट करता है।

निर्देश

1. कुमार, वि०, राम, सी० तथा परशाद, रा०, (प्रकाशनाधीन)
2. कुमार, वि० तथा परशाद, रा०, (प्रकाशनाधीन)
3. कुमार, वि०, राम, सी० तथा परशाद, रा०, (प्रकाशनाधीन)
4. बेनडेनियल, डी० जे० तथा ड्यूक, सी० बी०, **फिजिकल रिव्यू०**, 1967, **160**(3), 679-85.
5. त्सुइ, डी० सी०, **प्रोसीडिंग्स, 11वीं इंटरनेशनल कान्फ्रेंस आन फिजिक्स आफ सेमीकंडक्टर्स, वारसा पोलैंड,** (1972) भाग 1
6. वाक्समैन, ए०, शेवचुन, जे० तथा वारफील्ड, जी०, **सालिड स्टेट इलेक्ट्रानिक्स**, 1967, **10**, 1185.
7. गाडभीव, **सोवियत फिजिक्स केमीकंडक्टर्स**, 1971, **5**(5), 835.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20. No. 1, January 1977, Pages, 51-56

लागेर बहुपदों से सम्बद्ध बहुपद

हुकुम चन्द अग्रवाल
गणित विभाग, बुन्देलखण्ड कालेज, झाँसी

[प्राप्त—फरवरी 9, 1976]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य श्रीवास्तव द्वारा प्रचारित तथा अध्ययन किये गये लागेर बहुपदों से सम्बद्ध बहुपदों के लिये कुछ रोचक फल प्राप्त करना है।

Abstract

On polynomials related to the Laguerre polynomials. *By* Hukum Chand Agrawal, Department of Mathematics, Bundel Khand College, Jhansi.

The object of this note is to derive certain interesting results for the polynomials related to the Laguerre polynomials introduced and studied by Srivastava.

1. प्रस्तावना

हाल ही में कार्लिट्ज[2] का अनुसरण करते हुये श्रीवास्तव[11] ने लागेर बहुपदों से सम्बन्धित कतिपय बहुपदों को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{r=0}^{n} A_r^{(\alpha)}(x)\, L_{n-r}^{(\alpha+r)}(x)=0,\ n\geqslant 1 \\ \\ A_0^{(\alpha)}(x)=1, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

जहाँ इसका स्पष्ट रूप

$$A_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r(1+\alpha)_r}{r!}\, x^{n-r}, \tag{1.2}$$

है। सिंह[9], पराशर[8], सिंघल[10] तथा पाल[7] ने भी कतिय गुण प्राप्त किये हैं। इस टिप्पणी में हम कुछ अधिक गुणों की स्थापना करेंगे।

2. जनक फलन

दो चरों वाले संगमी हाइपरज्यामितीय फलन ϕ_3 को निम्न प्रकार[4] से परिभाषित किया जाता है

$$\phi_3(\beta, \gamma; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}.$$

अतः हमें

$$\phi_3(1+\alpha, a; -t, xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(a)_n} A_n^{(\alpha)}(x). \tag{2·1}$$

प्राप्त होता है।

पुनः दो चरों वाले संगमी हाइपरज्यामितीय फलन ϕ_1 को निम्न द्वारा[4] परिभाषित करते हैं

$$\phi_1(a, \beta, \gamma; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

जिससे

$$\phi_1(b, 1+\alpha, a; -t, xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{(a)_n} t^n A_n^{(\alpha)}(x). \tag{2·2}$$

प्राप्त होगा।

इस फल की विशिष्ट दशा ($b=a+2$, $a=a+1$ तथा $\alpha=a$) [7, equ. (2·1)] में प्राप्य है।

3. दो $A_n^{(\alpha)}(x)$ बहुपदों के योगफल के लिये समाकल निरूपण

निम्न पर विचार करें

$$A_m^{(\alpha)}(x) A_n^{(\beta)}(y) = \frac{(-)^{m+n}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} \left[\frac{\Gamma(1+\alpha+m-r)\Gamma(1+\beta+n-s)}{\Gamma(2+\alpha+\beta+m+n-r-s)}\right]$$

$$\left[\frac{(m+n-r-s)!}{(m-r)!\,(n-s)!}\right] \frac{\Gamma(2+\alpha+\beta+m+n-r-s)}{(m+n-r-s)!} \frac{(-x)^r}{r!} \frac{(-y)^s}{s!}$$

अब सम्बन्ध[12]

$$\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}=\frac{2^{\mu+\nu}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(\mu-\nu)\theta i}\cos^{\mu+\nu}\theta\, d\theta,\ (\mu+\nu>-1)$$

तथा

$$\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}=\int_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1}\,dt\ (\mu>0,\ \nu>0)$$

का उपयोग करने पर

$$A_m^{(\alpha)}(x)\,A_n^{(\beta)}(y)=\frac{2^{m+n}\,\Gamma(2+\alpha+\beta)}{\pi\,\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^{\alpha+m}(1-t)^{\beta+n}e^{(m-n)\theta i}$$

$$\cos^{m+n}\theta\, A_{m+n}^{\alpha+\beta+1}\left(\frac{x(1-t)e^{-i\theta}+yt\,e^{i\theta}}{2t(1-t)\cos\theta}\right)d\theta\,dt. \qquad (3\cdot1)$$

प्राप्त होगा।

4. समाकल

इसकी पुष्टि सरलता से की जा सकती है कि

$$\int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-x}A_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\frac{\Gamma(n+\gamma)}{n!}\,{}_2F_1(-n,1+\alpha;1-n-\gamma;-1), \qquad (4\cdot1)$$

$$\int_0^t x^{\gamma-1}(t-x)^{\beta-1}A_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(n+\gamma)}{n!\,\Gamma(n+\beta+\gamma)}\,t^{n+\beta+\gamma-1}$$

$${}_3F_1\left(-n,\ 1+\alpha,\ 1-n-\beta-\gamma;\ 1-n-\gamma,\ \frac{1}{t}\right), \qquad (4\cdot2)$$

$$\int_3^\infty x^{\gamma-1}(1+x)^{1/2}[\sqrt{x}+\sqrt{(1+x)}]^{2\mu}\,A_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\frac{2^{1-2n-2\lambda}\Gamma(2n+2\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-n-\mu-\lambda)}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2}+n+\lambda-\mu)}$$

$${}_4F_2\left(-n,\ 1+\alpha,\ \tfrac{1}{2}-n-\lambda-\mu,\ \tfrac{1}{2}-n-\lambda+\mu;\ \tfrac{1}{2}-n-\lambda,\ 1-n-\lambda,\ -1\right), \qquad (4\cdot3)$$

तथा

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}e^{-x}A_{m_1}^{(\alpha_1)}(\lambda_1 x)\,A_{m_2}^{(\alpha_2)}(\lambda_2 x)\,dx=\frac{\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\,\Gamma(\rho+m_1+m_2)}{\Gamma(1+m_1)\Gamma(1+m_2)}$$

$$F_3\left(-m_1,\ -m_2,\ 1+\alpha_1,\ 1+\alpha_2;\ 1-\rho-m_1-m_2;\ -\frac{1}{\lambda_1},\ -\frac{1}{\lambda_2}\right), \qquad (4\cdot4)$$

जिन्हें निम्न प्रकार से सार्वीकृत किया जा सकता है

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}e^{-x}\left\{A_{m_1}^{(\alpha_1)}(\lambda_1 x)\ldots A_{mn}^{(\alpha_n)}(\lambda_n x)\right\}dx \qquad (4\cdot5)$$

$$=\frac{\left[\lambda_1^{m_1}\ldots\lambda_n^{mn}\right]\Gamma(\rho+m_1+\ldots+m_n)}{\Gamma(1+m_1)\ldots\Gamma(1+m_n)}$$

$$F_B^{(n)}\left(1+\alpha_1, \ldots, 1+\alpha_n; -m_1, \ldots, -m_n; 1-\rho-m_1-\ldots-m_n; -\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, -\frac{1}{\lambda}\right)$$

जहाँ $F_B^{(n)}$ बहुक हाइपरज्यामितीय फलन है जिसे लारिसेला[6] ने परिभषित किया है। ज्ञात फलों [3, p. 177-389]

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, dx\, dy=B(\alpha, \beta)\int_0^\infty Z^{\alpha+\beta-1} f(z)\, dz$$

$$Re\,(\alpha)>0,\ Re\,(\beta)>0;$$

तथा

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(a^2x^2+b^2y^2)dxdy=\frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(z)\, dz$$

के सम्प्रयोग से यह देखा जा सकता है कि यदि

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}\,(x+y)^{\rho-1}\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\left\{A_{m_1}^{(\alpha)}\,[\lambda_1(x-y)]\ldots A_{mn}^{(\alpha n)}\,[\lambda_n(x+y)]\right\} dx\, dy \quad (4{\cdot}6)$$

$$=\frac{B(\alpha, \beta)\left[\lambda_1^{m_1}\ldots\lambda_n^{mn}\right]\Gamma(\alpha+\beta+\rho+m_1+\ldots+m_{n-1})}{\Gamma(1+m_1)\ldots\Gamma(1+m_n)}$$

$$F_B^{(n)}\left(1+\alpha_1, \ldots, 1+\alpha_u; -m_1, \ldots m_n; 2-\alpha-\beta-\rho-m_1-\ldots-m_n; -\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, -\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

तथा

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}(a^2x^2+b^2y^2)^{\rho-1}\left\{A_{m_1}^{(\alpha_1)}\,[\lambda_1(a^2x^2+b^9y^2)]\ldots\right.$$

$$\left.A_{mn}^{(\alpha n)}\,[\lambda_n(a^2x^2+b^2y^2)]\right\} dx\, dy \quad (4{\cdot}7)$$

$$=\frac{\left\{\lambda_1^{m_1}\ldots\lambda_n^{m_n}\right\}\Gamma(\rho+m_1+\ldots+m_n)}{\Gamma(1+m_1)\ldots\Gamma(1+m_n)}\frac{\pi}{4ab}$$

$$F_B^{(n)}\left(1+\alpha_1, \ldots, 1+\alpha_n; -m_1, \ldots, -m_n; 1-\rho-m_1-\ldots-m_n; -\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, -\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

5. स्फुट फल

सिंघल[10] द्वारा प्राप्त फल

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, t^n\, A_n^{(\alpha)}\,(x)\, A_n^{(\beta)}\,(y)=-e^{xyt}\,(1+xt)^{-1-\beta}\,(1+yt)^{-1-\alpha}$$

$$_2F_0\left(1+\alpha,\ 1+\beta;\ -;\ \frac{t}{(1+xt)(1+yt)}\right)$$

निम्नांकित प्रकार से सार्वीकृत किया जा सकता है:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (m+n)!\, t^n A_{m+n}^{(\alpha)} A_n^{(\beta)}(y) = x^m e^{xyt} (1+xt)^{-1-\beta} (1+yt)^{-1-\alpha}$$

$$ {}_2F_0\left(1+\alpha;\, 1+\beta;\, -;\frac{t}{(1+xt)(1+yt)}\right) \qquad (5\cdot1)$$

जो उक्त रूप में समानीत हो जाता है यदि $m=0$.

(5·1) की उपपत्ति

निम्नलिखित समीकरण पर विचार करें

$$\sum_{n=0}^{\infty} (m+n)!\, t^n A_{m+n}^{(\alpha)}(x) A_n^{(\beta)}(y) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \binom{m+n+k}{m+k} \frac{(ty)^n (1+\beta)_k (m+k)!\, (-t)^k}{k!}$$

$$A_{m+n+k}^{(\alpha)}(x).$$

अब सम्बन्ध [1, equ. (1·8)]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} t^m A_{(m+n}^{\alpha)}(x) = e^{xt} (1+t)^{-\alpha-n-1} A_n^{(\alpha)}\{x(1+t)\}$$

का उपयोग करने पर उपर्युक्त व्यंजक का वाम पक्ष

$$= x^m (1+ty)^{-1-\alpha} e^{xyt} \sum_{k=0}^{\infty} (1+\beta)_k \frac{(-xt)^k}{k!}\; {}_2F_0\left(-m-k,\, 1+\alpha;\, -;\, \frac{1}{x(1+y)}\right)$$

हो जावेगा जिससे समीकरण (5·1) प्राप्त होगा क्योंकि [5, p. 267]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!}\, {}_{p+1}F_q \left[\begin{matrix} -n,\, \alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_p \\ \beta_1,\, \ldots,\, \beta_q \end{matrix}\; x\right] t^n = (1-t)^{-\lambda}\, {}_{p+1}F_q \left[\begin{matrix} \lambda,\, \alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_p; \\ \beta_1,\, \ldots,\, \beta_q; \end{matrix}\; \frac{-xt}{1-t}\right]$$

चूंकि [1, eqn. (2·3)]

$$\mathop{\triangle}_{\alpha}^{r} A_n^{(\alpha)}(x) = (-)^r A_{n-r}^{(\alpha+r)}(x)$$

अत:

$$A_m^{(\alpha+n)}(x) = \sum_r \frac{(-n)_r}{r!} A_{m+n}^{(\alpha+r)}(x) \qquad (5\cdot2)$$

जिससे सामान्य फल प्राप्त होता है ।

$$A_m^{(\alpha+\sum_1^n n_j)}(x)=\sum_k \frac{(-n_j)r_j}{(r_j)!} A_{m+\sum_1^k n_i}^{(\alpha)+\sum_1^k r_j}(x). \qquad (5\cdot3)$$

अन्त में

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)}{n!} S_1\,(1+\alpha,\ -n,\ n-m,\ \beta;\ x,\ y) \qquad (5\cdot4)$$

$$=\frac{x^m\, m!}{(\beta)_m} A_m^{(\alpha)}\,\{y/x\}$$

जहाँ S_1 दो चरों वाला हम्बर्ट संगमी हाइपरज्यामितीय फलन है[4]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डी० ए० वी० कालेज, उरई के डा० आर० सी० सिह चन्देल के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयार में सहायता पहुँचाई है।

निर्देश

1. अग्रवाल, बी० एम० तथा अग्रवाल, एच० सी०, **इण्डि० नेश० साइंस एके०** (स्वीकृत)
2. कार्लिट्ज, Port. Math., 1961, **20**, 127-136
3. एडवर्ड्स, जे०, A Treatise on the Integral Calculus· **चेल्सिया पब्लिशिंग कम्पनी**, 1954
4. एर्डेल्यी, ए०, Table of Integral Transforms. **भाग** I, 1954 **मैकग्राहिल बुक कम्पनी न्यूयार्क**
5. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, **भाग** III, 1955 **मैकग्राहिल बुक कम्पनी न्यूयार्क**
6. लारिसेला, जी०, Circ. Mat. Palermo, 1893, **7**, 111-158
7. पाल, आर० एस०, **ज्ञानाभा**, 1971, **1**, 71-74
8. पराशर, बी० पी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस**, 1966, **36**, 734-49
9. सिंह, आर० पी०, Math. Japonicae, 1964, **9**, 5-9
10. सिहल, जे० पी०, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1967, **38**, 33-40
11. श्रीवास्तव, के० एन०, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1964, **28**, 43-50
12. व्हिटेकर, ई० टी० तथा वाट्सन, जी० एन०, A Course of Modern Analysis, 1963

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January 1977, Pages, 57-63

ऐजाडिराक्टा इन्डिका ए० जुस की पत्तियों का क्रमिक विकास और दिग्विन्यास

नीलिमा हरजाल
पादप शारीर प्रयोगशाला, वनस्पति विज्ञान विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जुलाई 19, 1976]

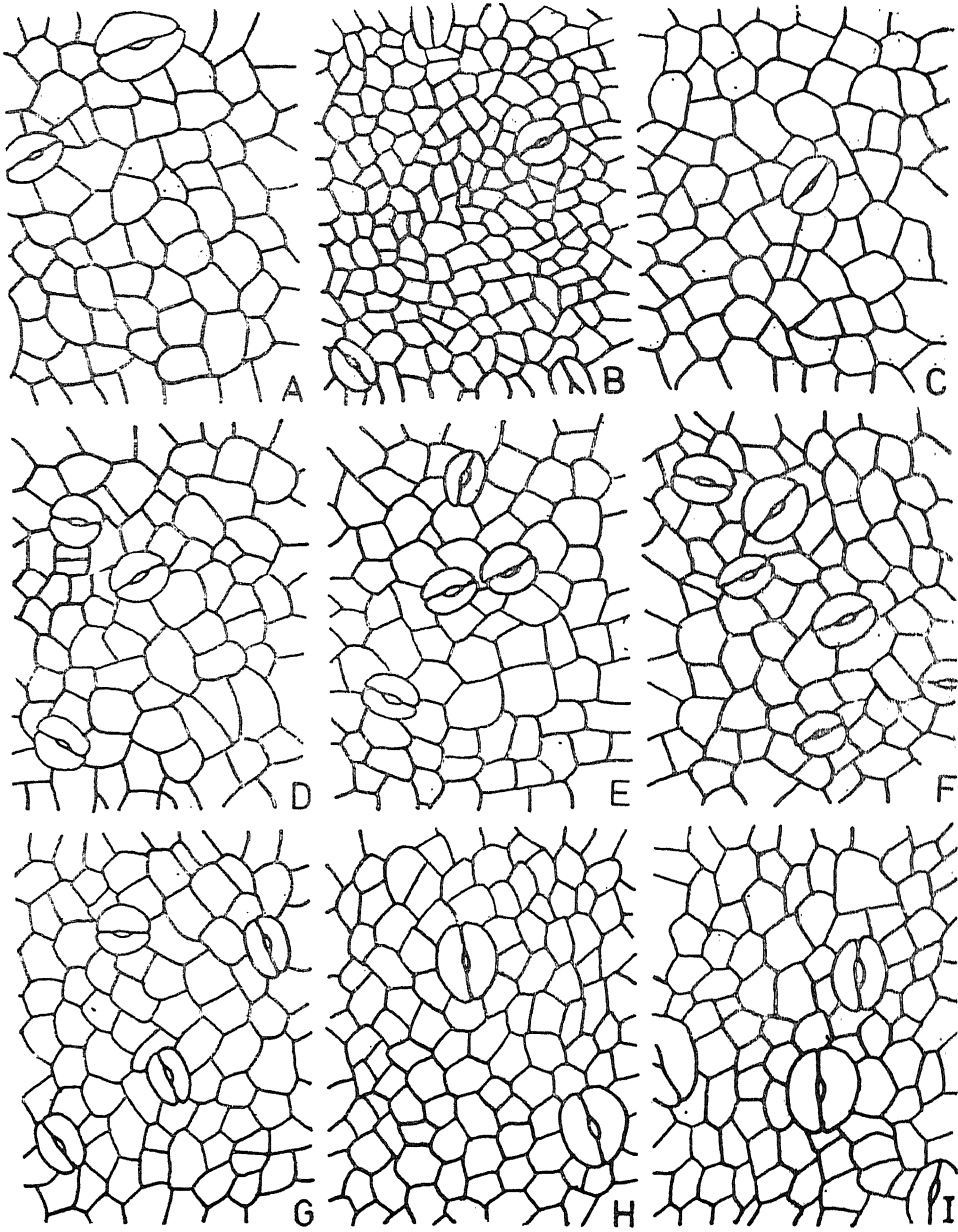
सारांश

संवहनी तंत्र के विभिन्न ऊतकों में कोशिका विभाजन और कोशिका प्रसार पर विशेष महत्व देते हुए **ऐजाडिराक्टा इन्डिका** में पत्ती के विकास का अध्ययन किया गया है। अधःरंध्रीय बाह्यत्वचा में ऐनोमोसिटिक रंध्र और बहुभुजी कोशिकाएँ होती हैं। एक शिरा वाला विन्यास द्वितीयकों, तृतीयकों, चतुष्कों और मध्यकों का बना होता है। गर्तरोम आकार में भिन्न भिन्न होते हैं और शिराअंतों की संख्या पत्ती की वृद्धि के साथ साथ बढ़ती जाती है। शिरा अंत, शिराग्र और गर्त रोम आकार का आपस में कोई भी सहसंबंध नहीं होता है।

Abstract

Studies on the sequential development of the leaves of Azadirachta indica *A. Juss.* *By* Nilima Harzal, Botany Department, Delhi University.

Leaf development in *Azadirachta indica* is described, with particular reference to the ratio and duration of cell division and cell expansion in the various tissues of the vascular system. The hypostomatic epidermis shows anomocytic stomata with polygonal cells. The single-nerved veination comprises secondaries, tertiaries, quaternaries and intermediaries. The areoles vary in size and the number of vein tips increases with the growth of the leaves. The vein endings, vein tips and the areole size show no correlation between themselves.

गोइथे ने पत्ती को पौधे का एक आवश्यक भाग मानकर उसके विकास की क्रमिक अवस्थाओं का अध्ययन किया। आकृतिक रूप से पत्ती प्ररोह के अग्र से पार्श्व वृद्धि के रूप में निकलती है और शारीर की दृष्टि से इसमें सारे ऊतक, जैसे बाह्यत्वचा, वल्कुट और रोम आदि सभी पाये जाते हैं।

चित्र 2

ऐजाडिराक्टा इन्डिका की पत्तियों की अधःत्वचीय बाह्यत्वचा के भाग जिसमें एनोमोसिटिक संरंध्र प्रदर्शित हैं $\times 380$

प्रयोगात्मक

पत्तियों के नमूने जमीन की सतह से 8-10 फुट ऊँचाई से इकट्ठे कर लिये गये। इनको चालू वर्ष के तने की प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ पर्वसंधियों से लिया गया। दो सबसे छोटी पत्तियों पर धागा बाँधकर प्रत्येक दिन एक निश्चित समय पर उनको नापा गया और यह क्रिया उनकी अधिकतम वृद्धि तक दोहराई गयी।

सबसे छोटी से लेकर सबसे बड़ी तक पत्तियों को फार्मेलीन-ऐसीटिक अम्ल ऐल्कोहल (FAA) में रख लिया गया। फिर इनको सोडियम हाइड्राक्साइड, क्लोरल हाइड्रेट और हाइड्रोजन पराक्साइड, (75% क्लोरल हाइड्रेट, 50% क्लोरल हाइड्रेट, 25% क्लोरल हाइड्रेट) से बनी सफाई श्रेणी से गुजारा गया जिसके पश्चात् पत्तियां बिल्कुल पारदर्शक हो जाती हैं। तत्पश्चात् इनको परम ऐल्कोहल और जाइलॉल में घुले सेफरेनीन में रंग लिया गया। बाह्यत्वचा के अध्ययन के लिये पत्तियों की निचली सतह की पर्तों को डेलाफील्ड हीमोटक्सिलीन में रंग कर आरोपण कर लिया गया। गर्तरोमों का क्षेत्र और शिराग्र तथा शिराग्रंतों की संख्या को विभिन्न आकार की पत्तियों में नापा गया। गर्तरोमों को 'ओक्यूलर ग्रिड' द्वारा नापा गया।

परिणाम तथा विवेचना

अ.पत्ती की आकृति—**ऐज़ाडिराक्टा इन्डिका** (नीम) की पत्तियाँ आकार में मालाकार होती हैं तथा इनके किनारे दाँतेदार होते हैं। ये शुष्कोद्भिद होती हैं। जब सारी पत्तियाँ क्रमिक रूप से लगी हों तो ये एक गुंथी हुई श्रेणी का निर्माण करती हैं। पर्ण क्षेत्र 90 से 892 मि मी$\circ^2$ तक होता है। पत्ती के विकास के साथ साथ उसके रंग में भी क्रमिक परिवर्तन आता जाता है क्योंकि ये हरे गुलाबी रंग से बदलकर गाढ़े हरे रंग की हो जाती हैं। पत्ती की वृद्धि दर समय के अनुपात में **चित्र 1** से दिखायी गयी है।

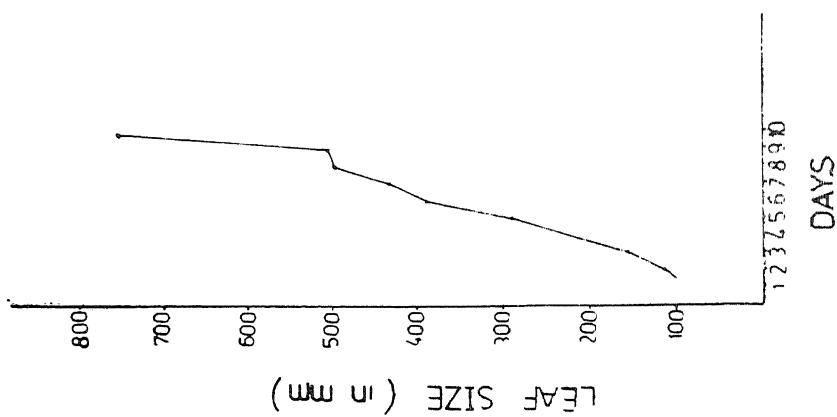
ब.पत्ती का शरीर : 1. बाह्यत्वचा : अधःत्वचा में रंध्र होते हैं। ये **एनोमोसिटिक** होते हैं। बाह्यत्वचीय कोशिकाएँ बहुभुजी और सघन होती हैं (**चित्र 2**)। पत्ती के प्रसार के साथ साथ रंध्र प्रति इकाई क्षेत्र में संख्या और आकार में बढ़ते जाते हैं। बाह्यत्वचीय कोशिकाएँ तेजी से विभाजित होती हैं जिसके फलस्वरूप प्रौढ़ पत्तियों में प्रति इकाई क्षेत्र इनकी संख्या तो बढ़ जाती है परन्तु आकार छोटा होता जाता है (सारणी 1)।

2. शिराविन्यास : परिपक्व पत्ती के शिराविन्यास तंत्र को दो भागों में विभाजित किया जा सकता है : **मुख्य भाग** (जो कि शिरा तंत्र के ढाँचे का निर्माण करता है) तथा **लघु भाग** (जो अधिक नाजुक शिराओं का बना होता है)। एक शिरा वाली पत्तियों में एक नाड़ी होती है जो कि फलक के आधार से अन्दर घुसकर मध्य शिरा का निर्माण करती है (**चित्र 3**)। कुछ दूर अविभाजित चलने के पश्चात् मध्य सिरा के दोनों ओर बहुत सारी शिराएँ निकालती हैं। द्वितीयक 40° के कोण पर निकलकर पुनः विभाजित हो जाती हैं और इस प्रकार द्वितीयक, तृतीयक और चतुष्क, आपस में एक जाल बनाती हैं।

चित्र 3 मुख्य शिराविन्यास प्रदर्शित करती हुई ऐजाडिराक्टा इन्डिका की पत्ती

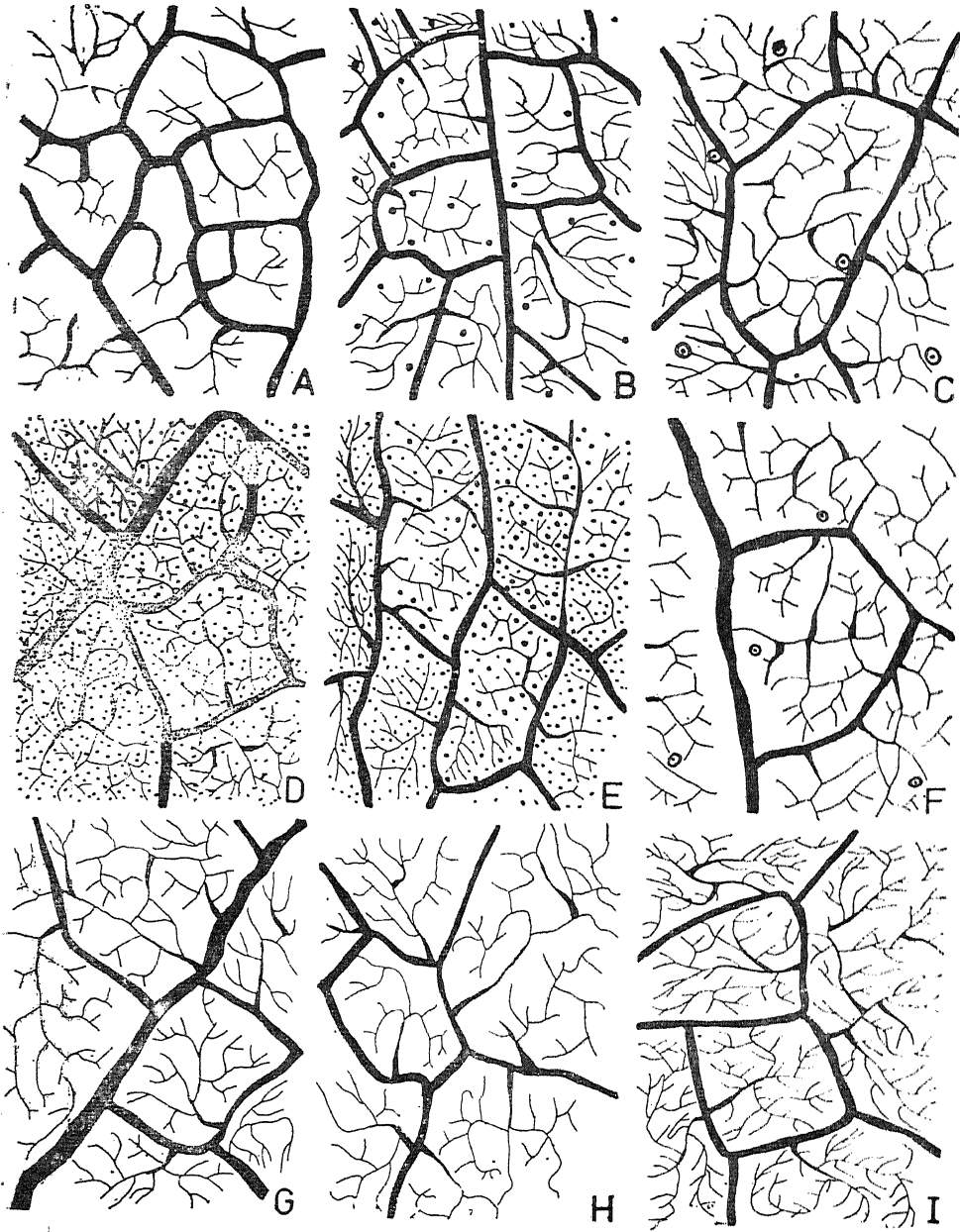
LEAF SIZE (in mm)

800
700
600
500
400
300
200
100

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
DAYS

चित्र 1 समय के अनुपात में ऐजाडिराक्टा इन्डिका की पत्तियों की वृद्धि दर

सारणी 1

ऐजाडिराक्टा इन्डिका ए० जुस में बाह्यत्वचीय और शिराविन्यास तंत्रीय लक्षण

दिन	गर्तरोमों की संख्या/मिमी०²	गर्तरोमों का क्षेत्र, मिमी०²	शिराग्रंतों की संख्या/गर्तरोम	शिराग्रों की संख्या गर्तरोम	संग्रंधों का आकार मिमी०²	संरंध्रों का आकार मिमी०²	बाह्यत्वचीय कोशिकाओं की संख्या/मिमी०²		बाह्यत्वचीय कोशिकाओं का आकार, मिमी०²	
							निचली	ऊपरी	निचली	ऊपरी
पहला	12.12	.0825	1.12	6.0	22.22	.0001	5333.3	6000.0	0.001	.0001
दूसरा	9.56	.1056	1.67	7.21	25.11	.0002	1117.2	5414.4	0.001	.0008
तीसरा	8.44	.1184	2.04	10.10	40.00	.0002	2618.6	5716.1	0.002	.0003
चौथा	6.55	.1517	3.33	12.15	51.11	.0003	2961.7	6040.6	0.001	.0003
पाँचवाँ	6.46	.1548	3.88	15.61	62.22	.0006	3141.0	6714.1	0.001	.0003
छठा	5.95	.1681	4.14	16.00	71.11	.0008	646.0	7771.1	0.001	.0002
सातवाँ	3.39	.2950	5.67	18.18	106.66	.0008	1817.3	7143.3	0.001	.0013
आठवाँ	3.20	.3120	5.89	20.02	108.88	.0009	717.4	9616.6	0.001	.0001
नौवाँ	2.82	.3536	6.01	20.19	117.77	.0009	541.3	9999.6	0.001	.0001

चित्र 4

ऐजाडिराक्टा इन्डिका की साफ की गयी पत्तियों के भाग जिसमें गर्तरोमों की वृद्धि दिखायी गयी है ×380

यहाँ पर हम मुख्य रूप से छोटी शिराग्रों पर ध्यान केन्द्रित करेंगे क्योंकि ये ही पत्ती के ऊतकों में सीधे संवहन करती हैं। ये शिराएँ पत्ती में चारों ओर जटिल रीति से फैली रहती हैं। गर्तरोमों में अनेक एक या कई शिराएँ होती हैं। शिराग्रंतों के विकास की अवस्थाएँ काफी रोचक हैं। विकास के प्रथम चरण में पत्ती में शिराएँ बहुत कम शिराग्रंतों वाला जाल बनाती हैं परन्तु कोशिका वृद्धि के कारण पत्ती के बढ़ने के साथ साथ शिरातंत्र भी बढ़ता जाता है (चित्र 4)। शिराग्रंत गर्तरोमों को बनाने वाले धागों से पैदा होते हैं। एक प्रौढ़ पत्ती में शिराग्रंतों की संख्या प्रति गर्तरोम 3.2 से 4.8 तक होती है। शिराग्रंतों की संख्या उस समय सबसे अधिक होती है जब पत्ती में कोशिका वृद्धि दिखाई पड़ती है। शिराग्रों की अधिकतम संख्या प्रति गर्तरोम 35 होती है जो एक अकेली शिराग्रंत से निकलती है।

इस प्रकार यह सिद्ध होता है कि

1. पत्ती के आकार के साथ साथ गर्तरोमों का आकार भी बढ़ता जाता है परन्तु पालीवाल आदि [1] के अनुसार क्रोटिवा नूखाला में यह सम रहता है।

2. पत्तियों में वृद्धि बाह्यत्वचा की कोशिकाओं की वृद्धि के कारण होती है जबकि **फाइकस रिलीजिओसा** में यह कोशिका वृद्धि के कारण होती है [2]

निर्देश

1. पालीवाल, जी० एस०, साजवान, वी० एस० तथा पालीवाल, नीलिमा, **एक्टा बोट० इन्डिका**, 1975, **2**, 99-102.

2. साजवान, वी० एस०, पालीवाल, नीलिमा तथा पालीवाल, जी० एस०, **एना० आफ बोटनी** (प्रेस में) **1976**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January, 1977, Pages 65-66

रुमेक्स वेसीकेरियस लिन. में उपस्थित ऐमीनो अम्ल

के० पी० तिवारी तथा वाई० के० सिंह राठौर
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—अक्टूबर 18, 1976]

सारांश

रुमेक्स वेसीकेरियस के प्रोटीन से संघटक ऐमीनो अम्ल सिस्टीन, ग्लूटामिक एसिड, प्रोलीन, फेनिल एलानिन तथा हिस्टीडीन प्राप्त किए गए ।

Abstract

Amino acid contents in Rumex vesicarius. *By* K. P. Tiwari and Y. K. Singh Rathore, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

The protein content of *Rumex vesicarius* Linn. has been found to contain cystine, glutamic acid, proline, phenyl alanine and histidine.

रुमेक्स वेसीकेरियस लिन [1,2] (हिन्दी-चुका, प्राकृतिक गण-पॉलीगोनिएसी) नामक पौधा पश्चिमी पंजाब में लवणीय स्थानों पर तथा ट्रांसइन्डस पहाड़ियों पर बहुतायत से उगता है। इस पौधे को भारत में कई स्थानों पर उगाया भी जाता है। पौधे की औषधीय एवं पोषण क्षमता को दृष्टि में रखते हुए रासायनिक परीक्षण हेतु चुना गया। प्रस्तुत शोध पत्र में पौधे में उपस्थित ऐमीनो अम्लों का वर्णन किया गया है।

प्रयोगात्मक तथा परिणाम

वायु में सुखाए गये पौधों को कूट कर बारीक चूर्ण बनाया। पौधे में उपस्थित वसीय पदार्थों को पेट्रोलियम ईथर (क्वथनांक 60-80°) के साथ सॉक्सलेट उपकरण में निष्कर्षित किया। वसारहित पौधे के चूर्ण (500 ग्रा०) को फिर एक लीटर गर्म जल के साथ मिलाया गया और भलीभाँति हिलाकर इसे छान लिया। अवशेष चूर्ण (सं० 1) को 0.2 प्रतिशत सोडियम हाइड्राक्साइड के विलयन (800 मि० ली०) के साथ 3 घंटे तक हिलाकर छान लिया। अवशेष चूर्ण (सं० 2) से सोडियम हाइड्राक्साइड मुक्त करने के लिए उसे पानी से भली भाँति धोया और फिर उसे 80 प्रतिशत एथिल ऐल्कोहल के साथ 24

घंटे तक प्रतिस्यन्दित करके छान लिया। अवशेष चूर्ण (सं० 3) में नाइट्रोजन की उपस्थिति का कोई परीक्षण नहीं मिला जिससे यह ज्ञात हुआ कि पौधे में अब कोई प्रोटीन शेष नहीं था। इस प्रकार पौधे का सम्पूर्ण प्रोटन तीनों निष्कर्षों (जल निष्कर्ष, 0.2%सोडियम हाइड्राक्साइड निष्कर्ष, और एथिल ऐल्कोहल निष्कर्ष) में आ गया।

अब प्रत्येक निष्कर्ष (100 मि०ली०) को अलग अलग 6N हाइड्रोक्लोरिक अम्ल (25 मि०ली०) के साथ 16 घण्टे तक जल ऊष्मक पर प्रतिस्यन्दित किया गया। प्रत्येक विश्लेषित भाग को पोर्सलीन प्याली में अलग-अलग लिया गया एवं हाइड्रोक्लोरिक अम्ल को जल-ऊष्मक पर आसवन रीति द्वारा बिमुक्त किया गया। वाष्पन को समय-समय पर आसवित जल मिलाकर तब तक वाष्पित किया जब तक कि उठने वाली वाष्प अमोनिया से भीगी हुई छड़ के साथ सफेद वाष्प न दे। प्रत्येक विश्लेषित भाग को परिशुद्ध ऐल्कोहल से निष्कर्षित किया और इस प्रकार प्राप्त तीनों ऐल्कोहली निष्कर्षों को एक बीकर में मिला लिया गया। इस मिश्रित निष्कर्ष में उपस्थित ऐमीनो अम्लों को अवरोहण वर्ण पत्र-लेखन विधि द्वारा पहचाना गया। वर्ण लेखन में ब्यूटेनॉल, ऐसीटिक अम्ल, जल (4: 1: 1: आयतनानुसार) की निचली सतह को विलायक के रूप में प्रयुक्त किया गया (विलायक के मिश्रण को 24 घण्टे तक साथ रखा गया था)। वर्णचित्र को वायु में 24 घण्टे तक सुखाया और इस पर 0.1% निनहाइड्रिन के ऐसीटोन में बने विलयन से छिड़काव किया गया। अब इसे विद्युत ऊष्मक में 5-10 मिनट तक सुखाया गया। विभिन्न ऐमीनो अम्ल धब्बे के रूप में वर्णचित्र पर प्रकट हो गये। प्रामाणिक ऐमीनो अम्लों के *Rf* मानों की सहायता प्रोटीन के विश्लेषण से धब्बे के रूप में उत्पन्न प्रोटीन के विश्लेषित ऐमीनो अम्लों को पहचाना गया। प्राप्त ऐमीनो अम्लों को नीचे सारणी 1 में प्रदर्शित किया गया है।

सारणी 1

रुमेक्स वेसीकेरियस से प्राप्त प्रोटीन के संघटक ऐमीनो अम्ल

	ऐमीनो अम्ल	*Rf* मान (30° से० पर)
1.	सिस्टीन	0.20
2.	ग्लूटामिक अम्ल	0.33
3.	प्रोलीन	0.55
4.	फेनिल एलानिन	0.72
5.	हिस्टीडीन	0.16

निर्देश

1. चोपड़ा, आर० एन०, नायर एस० एल० तथा चोपड़ा, आई० सी० Glossary of Indian Medicinal Plants. (सी० एस० आइ० आर० नई दिल्ली), 1956 संस्करण, पृष्ठ 216
2. कीर्तिकर, के आर० तथा बासू, बी० डी०, इण्डियन मेडिसिनल प्लांण्ट्स, 1935

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January, 1977, Pages 67-71

द्रवों की क्रिस्टलाभासी संरचना के आधार पर क्रिप्टान द्रव का डेबाई ताप

राम कृष्ण मिश्र
भौतिक विज्ञान विभाग, पी० बी० डिग्री कालेज, प्रतापगढ़

[प्राप्त—मई 1, 1976]

सारांश

द्रवों की क्रिस्टलाभासी संरचना के आधार पर क्रिप्टान द्रव का डेबाई ताप विभिन्न तापों एवं दाबों पर निकाला गया है। पूर्व विधि में सुधार किया गया है जिसमें θ_D निकालने के लिए केवल ρ, β_T, γ, V तथा C की आवश्यकता है। θ_D का मान ताप बढ़ाने से घटता तथा दाब बढ़ाने से बढ़ता है।

Abstract

Debye temperature of liquid krypton based on quasi-crystalline structure of liquids. *By* R. K. Mishra, Department of Physics, P. B. Degree College, Pratap Garh.

On the basis of quasi-crystalline structure of liquids the Debye temperature θ_D of liquid krypton has been calculated at different temperatures and pressures. The conventional method has been modified in which only ρ, β_T, γ, V and C are required for evaluating θ_D. The value of θ_D decreases by increasing the temperature and increases by increasing the pressure.

द्रवों की संरचना क्रिस्टलाभासी कही जा सकती है क्योंकि इनमें स्थानीय क्रमिक विन्यास कुछ कुछ क्रिस्टल जैसा पाया जाता है। द्रवों में परमाण्वीय गति का अध्ययन इनकी रचना को समझने के लिये बहुत उपयोगी सिद्ध हुआ है। दुर्भाग्यवश द्रवों में परमाण्वीय गति के अध्ययन की कोई सफल विधि अब तक प्राप्त नहीं है। हाल ही में न्यूट्रान प्रकीर्णन की विधि का, जिससे ठोस के अन्दर परमाण्वीय गति का अध्ययन किया जाता है, द्रवों में भी उपयोग किया गया है। न्यूट्रान के अर्धप्रत्यास्थ और अप्रत्यास्थ दोनों ही प्रकार के प्रकीर्णन द्रव की क्रिस्टलाभासी रचना की पुष्टि करते हैं। अब तक कई सैद्धान्तिक और प्रायोगिक तथ्य[1-6] मिल चुके हैं जो कि द्रवों की क्रिस्टलाभासी संरचना की पुष्टि करते हैं। क्रिस्टलाभासी संरचना मानकर जोशी[7] तथा अन्य लोगों ने[8-10] जल के डेबाई ताप की गणना एक निश्चित ताप पर की जो कि सिगवी[4] इत्यादि द्वारा दिए गए ताप से मिलता-जुलता है। हाल ही में कार आदि ने[10, 11] जल, मेथेनाल, एथेनाल, कार्बन टेट्राक्लोराइड तथा टॉल्वीन का डेबाई ताप विभिन्न तापों एवं दाबों पर

निकाला है। प्रस्तुत प्रपत्र में द्रवीय क्रिप्टान के लिए डेबाई ताप की गणना विभिन्न तापों एवं दाबों पर की गई है। पूर्व विधि में डेबाई ताप निकालने के लिए गणना में पराश्रव्यिकी अवशोषण आँकड़ों का उपयोग किया गया। वर्तमान विधि में हमने पराश्रव्यिकी अवशोषण आँकड़ों का उपयोग नहीं किया है वरन् एक अन्य विधि का उपयोग किया है।

गणना विधि

डेबाई ताप θ_D की गणना के लिए निम्नलिखित समीकरण का उपयोग किया जाता है:

$$\theta_D = \frac{h}{k}\left[\left(\frac{9N}{4\pi V}\right)\Big/\left(\frac{2}{c_t^3}+\frac{1}{c_l^3}\right)\right]^{1/3} \tag{1}$$

$$\frac{2}{c_t^3}+\frac{1}{c_l^3} = (\rho\beta_T)^{3/2}\left[2\left\{\frac{2(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}\right\}^{3/2}+\left\{\frac{(1+\sigma)}{3(1-\sigma)}\right\}^{3/2}\right] \tag{2}$$

जहाँ c_t तथा c_l क्रमशः अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्ध्य तरंग वेग, σ प्वाँसा अनुपात, ρ घनत्व तथा β_T समतापीय संपीड्यता हैं। N, h और k क्रमशः आवोगाड्रो संख्या, प्लांक स्थिरांक, बोल्ट्जमान स्थिरांक हैं। σ का मान निम्नलिखित व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$\sigma = \frac{3A-2}{6A+2} \tag{3}$$

जहाँ A का मान निम्न व्यंजक[12] द्वारा व्यक्त किया जाता है:

$$A = \frac{k_{T,\infty}}{G_{T,\infty}} = \left(\frac{k_{T,\infty}}{k_{T,\gamma}}\right)\Big/\frac{\eta_v}{\eta_s}\Big)\Big/\frac{\tau_s}{\tau_v}\Big) \tag{4}$$

$$\frac{\eta_v}{\eta_s} = \frac{4}{3}\left(\frac{\sigma_{obs}}{\alpha_{class}}-1\right) \tag{5}$$

सभी संकेत अपने प्रचलित अर्थों[12] में लिए हैं। पूर्व उल्लेखों में θ_D का मान समीकरण (2), (3) एवं (4) की सहायता से निकाला गया है। इसके लिए $\eta s\ \rho$, α/f^2 तथा c के प्रायोगिक आंकड़ों की आवश्यकता पड़ती है। निम्न समीकरण के प्रयोग से

$$\tau_s = \frac{4}{3}\eta_s\beta_o, \tag{6}$$

$$K_{T,\gamma} = \frac{1}{\beta_{T,\gamma}} = G_{T,\infty}\left(\frac{\eta_v}{\eta_s}\right), \tag{7}$$

$$G_{T,\infty} = \frac{\eta_r}{\tau_s}, \tag{8}$$

$$\eta_v = X_{T,\gamma}\,\tau_v, \tag{9}$$

तथा

$$\frac{1}{K_{T,\infty}}=\beta_{T,\infty}=\beta_o-\beta_{T,\gamma} \tag{10}$$

समीकरण (4) को इस प्रकार[13] लिखा जा सकता है

$$A=\frac{4}{3}\frac{1}{\gamma} \tag{11}$$

यहाँ पर $\gamma=\frac{c_p}{c_v}=\frac{\beta_T}{\beta_s}.$

समीकरण (1), (2), (3) एवं (11) की सहायता से हम θ_D का मान सरलतापूर्वक निकाल सकते हैं। इसमें हमको केवल γ, ρ एवं β_s का मान ज्ञात होना चाहिए जिसके लिए केवल ध्वनिवेग तथा घनत्व के प्रायोगिक आंकड़ों की आवश्यकता है।

द्रवीय क्रिप्टान के लिए प्रस्तुत प्रपत्र में हमने θ_D की गणना की है। इसके लिए प्रायोगिक आंकड़े स्ट्रीट[14] के शोध लेख से लिए गए हैं। गणना के फल तथा अन्य मान सारणी-1 में दिए गए हैं। 145°, 150°, 170° तथा 190° K ताप पर एवं 10 वायु० से 300 वायु० दाब मे बीच समतापीय संपीड्यता का मान क्रिप्टान के लिए दिया गया है। इनकी गणना हमने स्ट्रीट के प्रायोगिक मानों से की है। γ के मान से समीकरण (11) की सहायता से A का मान निकाला गया है जिसे सारणी-1 में प्रस्तुत किया है। A का मान दाब बढ़ाने से बढ़ता है। A के मान द्वारा समीकरण (3) से σ की गणना की गई। समीकरण (2) तथा (1) का प्रयोग करके एवं σ की सहायता से डेबाई ताप θ_D का मान निकाला गया जो कि दिए गए ताप एवं दाब पर सारणी-1 में प्रस्तुत किया गया है। द्रवीय क्रिप्टान के लिये θ_D का मान दाब बढ़ाने से बढ़ता है जैसा कि सारणी-1 से विदित है, ताप बढ़ाने से θ_D का मान घटने लगता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि द्रवीय क्रिप्टान को क्रिस्टलाभासी मान कर डेबाई ताप की गणना की जा सकती है जिसका उचित मान प्राप्त होता है। अतः हम यह मान सकते हैं कि संरचना में द्रव ठोसों से मिलते-जुलते हैं तथा इनके लिए भी एक विशिष्ट डेबाई ताप होने की संभावना है जो ताप एव दाब से परिवर्तित होता है। इस विषय पर पूर्ण ज्ञान प्राप्त करने तथा द्रवों को क्रिस्टलाभासी मानने के लिए डेबाई ताप एवं संबंधित फलनों पर विस्तृत अध्ययन की आवश्यकता है।

निर्देश

1. मॉलवेन-ह्यूज, ई० ए०, Physical Chemistry, **परगेमान प्रेस** 1965
2. टेवर, डी०, Gas, Liquid and Solid, **पेन्गूइन** 1969
3. फ्रेन्केल, जे०, Kinetic Theory of Liquids, **डावर पब्लिकेशन** 1946
4. सिंघवी, के० एस० तथा सेजोलेण्डर, ए०, **फिजिक० रिव्यू०**, 1960, **119**, 863

सारणी 1

द्रवित क्रिप्टन के लिए विभिन्न दाबों एवं तापों पर डेबाई ताप एवं संबंधित फलकों के मान

दाब (वायु०)	145°K			150°K			170°K			190°K		
	$\beta_T \times 10^4$ (वायु०$^{-1}$)	A	θ_D°K	$\beta_T \times 10^4$ (वायु०$^{-1}$)	A	θ_D°K	$\beta_T \times 10^4$ (वायु०$^{-1}$)	A	θ_D°K	$\beta_T \times 10^4$ (वायु०$^{-1}$)	A	θ_D°K
10	3·227	0·5607	40·40	3 721	0·4412	38·39	—	—	—	—	—	—
25	3·085	0·5687	41·02	3·529	0·5501	39·30	6·895	0·4559	31·26	—	—	—
50	2·877	0·5812	42·21	3·258	0·5636	40·48	5·919	0·4792	32·85	15·110	0·3702	23·79
100	2·542	0·6029	44·03	2·831	0·5879	42·07	4·618	0·5175	35·70	8·722	0·4410	28·52
200	2·080	0·6378	47·21	2·264	0·6261	45·76	3·275	0·5728	40·00	4·967	0·5217	34·49
300	1·772	0·6655	49·96	1·901	0·6564	48·65	2·572	0·6132	43·63	3·547	0·5732	38·84

5. वर्नल, जे० डी० तथा फाउलर, आर० एच०, जर्न० केमि० फिजि०, 1933, 515
6. पोपेल, जे० ए०, प्रोसी० रॉयल सोसा० (लंदन), 1951, **A205**, 163
7. जोशी, एस० के०, जर्न० केमि० फिजि०, 1961, **35**, 1141
8. जैन, एस० सी० तथा भण्डारी, आर० सी०, जर्न० फिजि० सोसा० (जापान), 1967, **23**, 476
9. मित्र, एस० के० तथा दास, एन०, Proc. Nucl. and Solid Physics Symposium, मदुराई, 1970, **III**, 337
10. कार, एस० के० तथा त्रिपाठी, एन० डी०, जर्न० फिजि० सोसा० (जापान) 1974, **36**, 552
11. कार, एस० के०, अग्रवाल, आशा तथा प्रसाद, आर०, एकुस्टिका, 1973, **29**, 552
12. लिटोविट्स, टी० ए० तथा डेविस, सी० एम०, Physical Accoustics, IIA, 1965, अकादमी प्रेस मुद्र डब्लू० पी० मासन
13. पाण्डेय, जे० डी० तथा पाण्डेय, एच० सी०, इण्डि० जर्न० फिजि०, 1975, **49**, 866
14. स्ट्रीट, डब्लू० वी०, रिंगरमाशर, एच० आई० तथा वुर्श, जे० एल०, जर्न० केमि० फिजि०, 1972, **57**, 3829

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January, 1977, Pages 73-80

दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के समाकल

जे० पी० सिंहल
गणित विभाग, एम० एस० यूनिवर्सिटी, बड़ौदा

तथा

एस० एस० भाटी
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अगस्त 24, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों के H-फलन वाले एक समाकल का मान निकालना है।

Abstract

Integrals involving generalized H-function of two variables. *By* J. P. Singhal, Department of Mathematics, M. S. University, Baroda and S. S. Bhati, Department of Mathematics and Statistics, University of Jodhpur, Rajasthan.

The object of the present paper is to evaluate an integral involving the H-function of two variables.

1. भूमिका

हमें निम्नांकित समाकल का मान ज्ञात करना है जिसमें दो चरों वाला H-फलन निहित है।

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u^{2\gamma-1} v^{2\lambda-1} H^{0,\,0\,:\,(m_1,\,n_1);\,(m_2,\,n_2)}_{p,\,q\,:\,[r,\,s];\,[k,\,l]} \left[\begin{matrix} au^{2\rho} \\ bv^{2\sigma} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_p;\,A_p,\,\alpha_p) : (c_r;\,C_r);\,(e_k,\,E_k) \\ (b_q;\,B_q,\,\beta_q) : (d_s;\,D_s);\,(f_l,\,F_l) \end{matrix}\right]$$

$$\times H^{0,\,0\,:\,(m_1',\,n_1');\,(m_2',\,n_2')}_{p',\,q'\,:\,[r',\,s'];\,[k',\,l']} \left[\begin{matrix} xu^{-2\mu} \\ yv^{-\nu 2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a'_{p'};\,A'_{p'},\,\alpha'_{p'}) : (c'_{r'};\,C'_{r'});\,(e'_{k'};\,E'_{k'}) \\ (b'_q;\,B'_{q'},\,\beta'_{q'}) : (d'_{s'};\,D'_{s'});\,(f'_{l'};\,F'_{l'}) \end{matrix}\right] du\, dv$$

$$= \frac{a^{-\gamma/\rho} b^{-\lambda/\sigma}}{4\rho\sigma} H^{0,\,0\,:\,(m_1+m'_1,\, n_1+r_1');\,(m_2+m_2',\, n_2+n_2')}_{p+p',\, q+q'\,:\,[r+r',\, s+s'];\,[k+k',\, l+l']} \left[\begin{matrix} xa^{\mu/\rho} \\ yb^{\nu/\sigma} \end{matrix}\right|$$

$$(\theta_p;\, M_p,\, M'_p),\, (a'_{p'};\, A'_{p'},\, \alpha'_{p'}) : (\psi_{n_1};\, P_{n_1}),\, (c'_{r'};\, C'_{r'}),\, (\psi_{n_1,\, r};\, P_{n_1,\, r});$$
$$(\phi_q;\, N_q,\, N'_q),\, (b'_{q'};\, B'_{q'},\, \beta'_{q'}) : (\delta_{m_1};\, Q_{m_1}),\, (d'_{s'};\, D'_{s'}),\, (\delta_{m_1,\, s};\, Q_{m_1,\, s});$$
$$\left.\begin{matrix} (\in_{n_2};\, R_{n_2}),\, (e'_{k'};\, E'_{k'}),\, (\in_{n_2,\, k};\, E_{n_2,\, a}) \\ (\omega_{m_2};\, S_{m_2}),\, (f'_{l'};\, F'_{l'}),\, (\omega_{m_2,\, l};\, S_{m_2,\, l}) \end{matrix}\right] \tag{1.1}$$

जहाँ $(a_p;\, A_p)$ अनुक्रम $(a_1,\, A_1),\, (a_2,\, A_2),\, \ldots,\, (a_p,\, A_p)$ के लिये,

$(a_p;\, A_p,\, \alpha_p)$ अनुक्रम $(a_1;\, A_1,\, \alpha_2),\, (a_2;\, A_2,\, \alpha_3), \ldots,\, (a_p;\, A_p,\, \alpha_p)$ के लिये

तथा $(\psi_{n_1,\, r};\, P_{n_1,\, r})$ $(\psi_{n_1+1},\, P_{n_1+1}),\, \ldots,\, (\psi_r,\, P_r)$ के लिये

और

$$\theta_j = a_j + \frac{\gamma}{\rho} A_j + \frac{\lambda}{\sigma} \alpha_j;\; M_j = \frac{\mu}{\rho} A_j, M'_j = \frac{\nu}{\sigma} \alpha_j;\; j = 1, 2, \ldots, p.$$

$$\phi_j = b_j + \frac{\gamma}{\rho} B_j + \frac{\lambda}{\sigma} \beta_j;\; N_j = \frac{\mu}{\rho} B_j,\, N'_j = \frac{\nu}{\sigma} \beta_j;\; j = 1, 2, \ldots, q.$$

$$\psi_j = c_j + \frac{\gamma}{\rho} C_j;\; P_j = \frac{\mu}{\rho} C_j;\; j = 1, 2, \ldots, r.$$

$$\delta_j = d_j + \frac{\gamma}{\rho} D_j;\; Q_j = \frac{\mu}{\rho} D_j;\; j = 1, 2, \ldots, s. \tag{1.2}$$

$$\epsilon_j = e_j + \frac{\lambda}{\sigma} E_j;\; R_j = \frac{\nu}{\sigma} E_j;\; j = 1, 2, \ldots, k.$$

$$\omega_j = f_j + \frac{\lambda}{\sigma} F_j;\; S_j = \frac{\nu}{\sigma} F_j;\; j = 1, 2, \ldots, l.$$

यह फल निम्नांकित प्रतिबन्ध समुच्चय के लिये वैध है

$$\sum_{j=1}^{p} A_j + \sum_{j=1}^{r} C_j < \sum_{j=1}^{q} B_j + \sum_{j=1}^{s} D_j$$

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j + \sum_{j=1}^{k} E_j < \sum_{j=1}^{q} \beta_j + \sum_{j=1}^{l} F_j$$

$$U = -\sum_{j=1}^{p} A_j - \sum_{j=1}^{q} B_j + \sum_{j=1}^{m_1} D_j - \sum_{j=m_1+1}^{s} D_j + \sum_{j=1}^{n_1} C_j + \sum_{j=n_1+1}^{r} C_j > 0$$

$$V=-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j-\sum_{j=1}^{q}\beta_j+\sum_{j=1}^{m_2}F_j-\sum_{j=m_2+1}^{l}F_j+\sum_{j=1}^{n_2}E_j-\sum_{j=n_2+1}^{k}E_j>0$$

$$|\arg a|<\frac{1}{2}U\pi$$

$$|\arg b|<\frac{1}{2}V\pi$$

$$\sum_{j=1}^{p'}A'_j+\sum_{j=1}^{r'}C'_j<\sum_{j=1}^{q'}B'_j+\sum_{j=1}^{s'}D'_j$$

$$\sum_{j=1}^{p'}\alpha'_j+\sum_{j=1}^{k'}E'_j<\sum_{j=1}^{q'}\beta'_j+\sum_{j=1}^{l'}F'_j$$

$$U'=-\sum_{j=1}^{p'}A'_j-\sum_{j=1}^{q'}B'_j+\sum_{j=1}^{m'_1}D'_j-\sum_{j=m'_1+1}^{s'}D'_j+\sum_{j=1}^{n'_1}C'_j-\sum_{j=n'_1+1}^{r'}C'_j>0$$

$$V'=-\sum_{j=1}^{p'}\alpha'_j-\sum_{j=1}^{q'}\beta'_j+\sum_{j=1}^{m'_2}F'_j-\sum_{j=m'_2+1}^{l'}F'_j+\sum_{j=1}^{n'_2}E'_j-\sum_{j=n'_2+1}^{k'}E'_j>0$$

$$|\arg x|<\frac{1}{2}U'\pi$$

$$|\arg y|<\frac{1}{2}V'\pi$$

तथा

$$Re\left[\frac{\mu}{\rho}\frac{(c'_i-1)}{C'_i}-\frac{d_j}{D_j}\right]<\frac{\gamma}{\rho}<Re\left[\frac{1-c_j}{C_j}+\frac{\mu}{\rho}\frac{d'_i}{D'_i}\right]$$

$$1\leqslant i\leqslant n'_1 \qquad 1\leqslant i\leqslant m'_1$$

$$1\leqslant j\leqslant m_1 \qquad 1\leqslant j\leqslant n_1$$

$$Re\left[\frac{\nu}{\sigma}\frac{e'_i-1}{E'_i}-\frac{f_j}{F_j}\right]<\frac{\lambda}{\sigma}<Re\left[\frac{1-e_j}{E_j}+\frac{\nu}{\sigma}\frac{f'_i}{F'_i}\right]$$

$$1\leqslant i\leqslant n'_2 \qquad 1\leqslant i\leqslant m'_2$$

$$1\leqslant j\leqslant m_2 \qquad 1\leqslant j\leqslant n_2$$

(1·1) के समाकल्य में निहित दो चरों वाले H-फलन को द्विगुण मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल[4] के द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

$$H^{0,\,n_1;\,(m_2,\,n_2):\,(m_3,\,n_3)}_{p,\,q\,:\,[r,\,s];\,[k,\,l]}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_p;\,A_p,\,\alpha_p)\,:\,(c_r:\,C_r);\,(e_k,\,E_k)\\(b_q:\,B_q,\,\beta_q)\,:\,(d_s;\,D_s);\,(f_l;\,F_l)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}F(\xi,\,\eta)g(\xi)h(\eta)x^{\xi}y^{\eta}\,d\xi\,d\eta \tag{1·3}$$

जहाँ
$$F(\xi,\,\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_j\xi+\alpha_j\eta)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-b_j+B_j\xi+\beta_j\eta)\prod_{j=n_1+1}^{p}\Gamma(a_j-A_j\xi-\alpha_j\eta)},$$

$$g(\xi)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_j\xi)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_j\xi)}{\prod_{j=m_2+1}^{s}\Gamma(1-d_j+D_j\xi)\prod_{j=n_2+1}^{r}\Gamma(c_j-C_j\xi)}, \tag{1·4}$$

$$h(\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j\eta)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_j\eta)}{\prod_{j=m_3+1}^{l}\Gamma(1-f_j+F_j\eta)\prod_{j=n_3+1}^{k}\Gamma(e_j-E_j\eta)}.$$

कंटूर की परिभाषा तथा (1·3) की वैधता के प्रतिबन्धों को निर्देश[4] में देखना होगा ।

2. (1·1) की उपपत्ति

(1·1) की उपपत्ति के लिये निम्नांकित समाकल का प्रयोग किया जा रहा है

$$\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2\gamma-1}\,v^{2\lambda-1}\,H^{0,\,0\,:\,(m_1,\,n_1);\,(m_2,\,n_2)}_{p,\,q\,:\,[r,\,s];\,[k,\,l]}\left[\begin{matrix}au^{2\rho}\\bv^{2\sigma}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_p;\,A_p,\,\alpha_p)\;\,(c_r:\,C_r);\,(e_k,\,E_k)\\(b_q;\,B_q,\,\beta_q)\,:\,(d_s;\,D_s);\,(f_l,\,F_l)\end{matrix}\right.\right]du\,dv \tag{2·1}$$

$$=\frac{a^{-\gamma/\rho}b^{-\lambda/\sigma}}{4\rho\sigma}F\left(-\frac{\gamma}{\rho},\,-\frac{\lambda}{\sigma}\right)g\left(-\frac{\gamma}{\rho}\right)h\left(-\frac{\lambda}{\sigma}\right)u^{-\gamma/\rho}v^{-\lambda/\sigma}$$

जहाँ F, g, h को $(\overline{1.4})$ से प्राप्त होते हैं और

$$-\min_{1\leqslant j\leqslant m_1} Re\left(\frac{d_j}{D_j}\right)<\frac{\gamma}{\rho}<\min_{1\leqslant j\leqslant n_1} Re\left(\frac{1-c_j}{C_j}\right)$$

$$-\min Re\left(\frac{f_j}{F_j}\right) < \frac{\lambda}{\sigma} < \min Re\left(\frac{1-e_j}{E_j}\right)$$
$$1 \leqslant j \leqslant m_2 \qquad\qquad 1 \leqslant j \leqslant n_2$$

फलन $f(x, y)$ द्विगुण मेलिन-परिवर्त का उपयोग करने पर समाकल (2.1)

$$F(s, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{s-1} y^{t-1} f(x, y)\, dx\, dy$$

के रूप में प्राप्त होता है जहाँ s तथा t उपयुक्त संमिश्र संख्यायें हैं ।

(1.1) के वामपक्ष को I द्वारा प्रदर्शित करने पर

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty u^{2\gamma-2\mu\xi-1} v^{2\lambda-2\nu\eta-1}\, H^{0,\,0\,:\,(m_1,\,n_1);\,(m_2,\,n_2)}_{p,\,q\,:\,[r,\,s];\,[k,\,l]} \left[\begin{matrix} au^{2\rho} \\ bv^{2\sigma} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (a_p;\, A_p,\, \alpha_p) : (c_r;\, C_r);\, (e_k,\, E_k) \\ (b_q;\, B_q,\, \beta_q) : (d_s;\, D_s);\, (f_l,\, F_l) \end{matrix}\right]$$

$$\times \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} F(\xi, \eta) g(\xi) h(\eta) x^\xi y^\eta\, d\xi\, d\eta\, du\, dv$$

जो (2·1) तथा (1·3) के परिपेक्ष्य में वांछित फल (1·1) प्रदान करता है

3. विशिष्ट दशायें

यदि (1.1) में $A_p, \alpha_p, B_q, \beta_q, C_r, D_s$ आदि अचरों को इकाई के तुल्य रखें, $u = n\rho$, $\nu = n\sigma$ तथा $b_q, c_r, e_k, b'_q, c'_{r'}$, एवं $e'_{k'}$ के स्थान पर क्रमश: $1-b_q, 1-c_r, 1-e_k, 1-b'_{q'}, 1-c'_r$, तथा $1-e'_{k'}$, रखें तो उसमे निहित H-फलन दो चरों वाले G-फलन[1] में समानीत हो जाता है। इस प्रकार

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u^{2\gamma-1} v^{2\lambda-1}\, G^{0,\,0\,:\,(m_1,\,n_1);\,(m_2,\,n_2)}_{p,\,q\,:\,[r,\,s];\,[k,\,l]} \left[\begin{matrix} au^{2\rho} \\ bv^{2\sigma} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (a_p) : (c_r) : (e_k) \\ (b_q) : (d_s);\, (f_l) \end{matrix}\right]$$

$$\times G^{0,\,0\,:\,(m'_1,\,n'_1);\,(m'_2,\,n'_2)}_{p',\,q'\,:\,[r',\,s'];\,[k',\,l']} \left[\begin{matrix} xu^{-2\rho} \\ yv^{-2\sigma} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (a'_{p'}) : (c'_{r'});\, (e'_{k'}) \\ (b'_{q'}) : (d'_{s'});\, (f'_{l'}) \end{matrix}\right] du\, dv$$

$$= \frac{(2\pi)^A n^B}{4\rho\sigma a^{\gamma/\rho} b^{\lambda/\sigma}}\, G^{0,\,0\,:\,(m'_1+nm_1,\,n'_1+nn_1);\,(m'_2+nm_2,\,n'_2+nn_2)}_{p'+np,\,q'+nq'\,:\,[r'+nr,\,s'+ns];\,[k'+nk,\,l'+nl]} \left[\begin{matrix} x^X \\ y^Y \end{matrix}\right|$$

$$\triangle(n, \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\lambda}{\sigma} + a_p), (a'_{p'}) : (c'_{n'_1}),\ \triangle(n, -\frac{\gamma}{\rho} + c_{n_1}), (c'_{n'_1},\, r),$$

$$(b'_{q'}), \triangle(n, \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\lambda}{\sigma} + b_q) : (d'_{m'_1}),\ \triangle(n, \frac{\gamma}{\rho} + d_{m_1}), (d'_{m'_1},\, s),$$

$$\left.\begin{matrix}\nabla(n,\ -\frac{\gamma}{\rho}+c_{n_1},\ r);\ (e'_{n'_2}),\ \triangle(n,\ -\frac{\lambda}{\sigma}+e_{n_2}),\ (e'_{n'_2},\ k')\ \ \nabla(n,\ -\frac{\lambda}{\sigma}+e_{n_2},\ k)\\ \nabla(n,\ \frac{\gamma}{\rho}+d_{m_1},\ s);\ (f'_{m'_2}),\ \ \triangle(n,\ \frac{\lambda}{\sigma}+f_{m_2}),\ (f'_{m'_2},\ l').\ \ \nabla(n,\ \frac{\lambda}{\sigma}+f_{m_2},\ l)\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

प्राप्त होता है जहाँ $A=\{(n_1+n_2+m_1+m_2)-\frac{1}{2}(r+k+s+l)\}(1-n)$

$$B=\sum_{j=1}^{r} c_j+\sum_{j=1}^{k} e_j+\sum_{j=1}^{l} f_j+\sum_{j=1}^{s} d_j-\sum_{j=1}^{p} a_j-\sum_{j=1}^{q} b_j$$

$$+\frac{\gamma}{\rho}(s-r-p-q)+\frac{\lambda}{\sigma}(l-k-p-q)-\frac{1}{2}(r+s+k+p-q)$$

$$X=a^n n^{(r-s+p-q)n}$$

$$Y=b^n n^{(k-l+p-q)n}$$

तथा $\Delta(n, a)$ के द्वारा

$$\frac{a}{n},\ \frac{a+1}{n},\ \ldots,\ \frac{a+n-1}{n};$$

$\nabla(n, a)$ से $1-\frac{a}{n},\ 1-\frac{a+1}{n},\ \ldots,\ 1-\frac{a+n-1}{n},$

$(d'_{m'_1}, s')$ से $(d'_{m'_1+1}), (d'_{m'_1+2}), \ldots, (d'_{s'})$.

प्राचलों के समुच्चय का द्योतन होता है ।

समाकल (3·1) निम्नांकित प्रतिबन्ध समुच्चयों के अन्तर्गत वैध है ।

$$2(n_1+m_1)>p+q+r+s$$

$$2(n_2+m_2)>p+q+k+l$$

$$|\arg a|<\left(n_1+m_1-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}-\frac{r}{2}-\frac{s}{2}\right)\pi$$

$$|\arg b|<\left(n_2+m_2-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}-\frac{k}{2}-\frac{l}{2}\right)\pi$$

$$2(n'_1+m'_1)>p'+q'+r'+s'$$

$$2(n'_2+m'_2)>p'+q'+k'+l'$$

$$|\arg x|<\left(n'_1+m'_1-\frac{p'}{2}-\frac{q'}{2}-\frac{r'}{2}-\frac{s'}{2}\right)\pi$$

$$| \arg y | < \left(n'_2+m'_2-\frac{p'}{2}-\frac{q'}{2}-\frac{k'}{2}-\frac{l'}{2}\right)\pi$$

$$-Re\,(nc'_i+d_j) < \frac{\gamma}{\rho} < Re\,(c_j+nd'_i)$$

$$1 \leqslant i \leqslant n'_1 \qquad 1 \leqslant i \leqslant m'_1$$

$$1 \leqslant j \leqslant m_1 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n_1$$

$$-Re\,(ne'_i+f_j) < \frac{\lambda}{\sigma} < Re\,(e_j+nf'_i)$$

$$1 \leqslant i \leqslant n'_2 \qquad 1 \leqslant i \leqslant m'_2$$

$$1 \leqslant j \leqslant m_2 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n_2$$

समाकल (3·1) को सम्बन्ध [2, p, 215]

$$G_{2,\,4}^{4,\,0}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\pm a\\ 0,\ \frac{1}{2},\ \pm b\end{matrix}\right]=\pi^{1/2}x^{-1/2}W_{a,\,b}(2x^{1/2})W_{-a,\,b}(2x^{1/2}) \tag{3·2}$$

के साथ मिलाने पर उपयुक्त प्रतिवन्धों के अन्तर्गत

$$\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2\gamma-1}v^{2\lambda-1}\,W_{a,\,b}(u)W_{-a,\,b}(u)W_{c,\,d}(v)W_{-c,\,d}(v)$$

$$\times G_{p',\,q'\,:\,[s',\,r'];\,[k',\,l']}^{0,\,0\,:\,(m'_1,\,n'_1);\,(m'_2,\,n'_2)}\left[\begin{matrix}xu^{-2n}\\ yv^{-2n}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}(a'_{p'})\,:\,(c'_{r'});\,(e'_{k'})\\ (b'_{q'})\,:\,(d'_{s'});\,(f'_{l'})\end{matrix}\right]du\,dv$$

$$=(2\pi)^{1-2n}(2n)^{\gamma+2\lambda-1}\,G_{p',\,q'\,:\,[r'+2n,\,s'+4n];\,[k'+2n,\,l'+4n]}^{0,\,0\,:\,(m'_1+4n'_1);\,(n'_2+4n,\,n_2)}\left[\begin{matrix}x(2n)^{-2n}\\ \\ y(2n)^{-2n}\end{matrix}\right|$$

$$(a'_{p'})\,:\,(c'_{r'}),\ \nabla(n,\,1\pm a+\gamma);$$

$$(b'_{q'})\,:\,(d'_{m'_1}),\ \triangle\left(n,\,\gamma+\frac{1}{2}\right).\ \triangle(n,\,\gamma+1),\ \triangle\left(n,\,\gamma+\frac{1}{2}\pm b\right),\ (d_{m'_1},\,s');$$

$$\left.\begin{matrix}(e'_{k'}),\ \nabla(n,\,1\pm c+\lambda)\\ (f'_{m'_2}),\ \triangle\left(n,\,\lambda+\frac{1}{2}\right),\ \triangle(n,\,\lambda+1),\ \triangle\left(n,\,\lambda+\frac{1}{2}\pm d\right),\ (f_{m'_2},\,l')\end{matrix}\right] \tag{3·3}$$

में सरल हो जावेगा।

(3·3) इसके पूर्व वर्मा[8] द्वारा प्राप्त फल के संगत है।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस, इंडिया,** 1965, **31** 536-546

2. एर्डेल्यी, ए० **इत्यादि,** Higher Trans cendental Functions. **भाग I मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1953

3. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०,** 1961, **98,** 395-429

4. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इंडि० एके० साइंस,** 1972, **75A,** 117-25

5. राठी, मे० सी०, **प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०,** 1959, **4,** 186-87

6, वर्मा, आर० यू०, **गणित** 1965, **16,** 65-68

7. वही, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस, इंडिया,** 1966, **32A,** 509-515

8. वही, **मैथ स्टुडेंट,** 1972, **40A,** 40-46

9. विडर, डी० वी०, The Laplace transform. **यूनिवर्सिटी प्रेस, प्रिंसटन,** 1952

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January, 1977, Pages 81-84

कुछ α-हाइड्राक्सी अम्लों के साथ Cr(III) तथा Ti(III)संकुलों का वर्णरासायनिक अध्ययन

पी० बी० चक्रवर्ती

रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

तथा

एच० एन० शर्मा

प्राचार्य, माधव विज्ञान विद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—सितम्बर 23, 1976]

सारांश

क्रोमियम (III) के ग्लायकोलिक, लैक्टिक एवं मैंडलिक अम्लों के साथ संकुलों के लिये परिकलित वर्णरासायनिक स्थिरांक, △ तथा β, इन संकुलों के स्थायित्व का क्रम लीगैंड की क्षारक-सामर्थ्य के क्रम में निरूपित करते हैं। क्रोमियम (III) संकुलों की अपेक्षा टाइटेनियम (III) संकुलों का अधिक स्थायित्व क्रिस्टल फील्ड सिद्धांत की प्रागुक्तियों के विपरीत पाया गया, जिसका कारण 'जान-टेलर विरूपण' बतलाया गया है।

Abstract

Spectrochemical study of complexes of Cr (III) and Ti (III) with hydroxy acids. *By* P. B. Chakravarti and H. N. Sharma, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Calculated spectrochemical constants, △ and β of complexes of glycolic, lactic and mandelic acid with Cr(III), and the order of stability of these complexes follow in the order of base capacity of ligands.

क्रोमियम की इलेक्ट्रॉनिक संरचना (A)($3d^5$) है [1]। इसकी सबसे विशिष्ट उपचयन अवस्था Cr(III) है, जिसमें परमाण्वीय आद्य-अवस्था 4F तथा अष्टफलकीय फील्ड में आद्य अवस्था $4A_{2g}$ होती है। लीगैंड फील्ड सिद्धांत के अनुसार $4A_{2g}$ आद्य-पद (Ground Term) से तीन उत्तेजित चतुष्क-पद (क्वार्टेट-टर्म) प्राप्त होते हैं :

$4A_{2g}$ (F) → $4T_{2g}$ (F) ≈ 17,000 cm^{-1}

$4A_{2g}$ (F) → 4T1g (F) ≈ 24,000 cm^{-1}

तथा $4A_{2g}$ (F) → 4T1g (F) ≈ 37,000 cm^{-1}

निम्नतर दो स्तरों, $4A_{2g}$(F) तथा $4T_{2g}$, में ऊर्जा का पार्थक्य 10Dq माना जाता है। फ्रेंकेल-स्टेन तथा वानप्लेक [2] ने d^3 विन्यास की विवेचना करते हुए बताया कि यदि Dq का मान 1820 cm^{-1} लिया जाये तो निम्नतम द्विक-अवस्था प्रेक्षित स्थान पर प्राप्त होती है। ओर्गल [3] ने Cr(III) संकुलों के, d^3 विन्यास के अंतर्गत चतुष्क-चतुष्क संक्रमण के लिये दो प्रबलतम तरंग-दैर्ध्य अवशोषण बैंडों के मान 17200 cm^{-1} तथा 25700cm^{-1} बताये जबकि प्रयोगों से प्राप्त मान 17,200cm^{-1} तथा 25,600cm^{-1} थे [4]। अतः Dq का मान 1720cm^{-1} मानने पर एकल (सिंग्लेट) तथा त्रिक् (ट्रिपलेट) दोनों अवस्थाएं इससे मेल खाती हैं।

क्रिस्टल फील्ड सिद्धांत के अनुसार Cr(III) [d^3] तथा Ti(III)[d^1] संकुलों के स्थायित्व का क्रम Cr(III)>Ti(III) होना चाहिए, किंतु प्राप्त क्रम [5] Ti(III)>Cr(III) है। प्रस्तुत शोध पत्र में स्थायित्व के इस विपरीत क्रम की व्याख्या 'जान-टेलर विरूपण' के आधार पर की गयी है।

विवेचना

Cr(III) के 5.0 पी-एच पर, प्रस्तुत अनुसंधान में प्रयुक्त लीगैंडों के साथ बने 1:3 संकुलों के वर्ण-रासायनिक-गुण सारणी 1 में दिये गये हैं। इन सभी संकुलों में ≈1700cm^{-1} के समीप बैंड, ओर्गल [3] तथा बालहॉसेन [6] के अनुसार, Dq के लिये लिये गये हैं। △ का यह मान मानते हुए, बालहॉसेन [6] के अनुसार राका (Racah) स्थिरांक, B तथा नेफेलॉक्ज़ेटिक गुणांक (Nephelauxetic coefficient), β के मान परिकलित किये गये हैं। संगत Ti(III) संकुलों के लिये, चक्रवर्ती तथा शर्मा [7, 8, 9] द्वारा दिये गये, △ के मान भी तुलना के लिये साथ में दे दिये गये हैं।

सारणी 1

α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ Cr(III) तथा Ti(III) 1:3 संकुलों के वर्णरासायनिक-स्थिरांक

संकुल	λ max mμ	$\bar{V}$ max cm^{-1}	EM	10 Dq cm^{-1}	B	β
Cr(III)-ग्लायकोलेट	415	23,855				
	572.5	17,467	96·25	17,467	712.95	0.775
Cr(III)-लैक्टेट	425	23,529				
	570	17,544	26.25	17,544	716·08	0·780
Cr(III)-मेंडलेट	420	23,809				
	575	17,391	85·42	17,391	709·83	0·773
Ti(III)-ग्लायकोलेट [7]	345	28,985	7·2	28,985		
Ti(III)-लैक्टेट [8]	340	29,412	5·81	29,412		
Ti(III)-मेंडलेट [9]	345	28,985	8·37	28,985		

प्रस्तुत अनुसंधान में प्राप्त △ तथा EM के मान Cr(III) [10-17] तथा Ti(III) [18-21] के अष्टफलकीय संकुलों के लिये दिये गये मानों के अनुरूप हैं। Cr(III) संकुलों के प्रकरण में अष्टफलकीय त्रिविम विन्यास की पुष्टि B तथा β के मानों से [सारणी 1] भी होती है। लीगैंड-फील्ड-स्थिरांक केन्द्रीय धातु आयन, लीगैंड तथा त्रिविमरसायन पर निर्भर करता है [13]। अष्टफलकीय संकुलों में कक्षकों के दो वर्गों को पृथक करने की क्षमता का क्रम, Cr(III) संकुलों के प्रकरण में, लैक्टेट > ग्लायकोलेट > मैंडलेट पाया गया। β-श्रेणी भी इसी क्रम की पुष्टि करती है जो कि इन लीगैंडों की क्षारक समर्थ्य का क्रम भी है।

इन लीगैंडों के साथ Ti(III) संकुल, Cr(III) संकुलों की अपेक्षा, अधिक स्थायी पाये गये है [5]। 10 Dq के मान भी इस क्रम की पुष्टि करते हैं [सारणी 1]।

Ti(III) में उत्तेजित Eg अवस्था के 'जान-टेलर विरूपण' की संभावना रहती है, जिसके फलस्वरूप चतुष्कोणीय विकृति (टेट्रागोनल पर्टर्बेशन) के अंतगर्त यह स्तर $B_{1}g$ तथा A_{1g} स्तरों में विभाजित हो जाता है। अतः Ti(III) संकुलों में जान-टेलर विरूपण के मान परिकलित किये गये, जो बताते हैं कि इस विरूपण के फलस्वरूप इन संकुलों में 10Dq के मानों में ≈20% की वृद्धि हो जाती है। इन Ti(III) संकुलों में, एक इलेक्ट्रॉन की उपस्थिति के कारण, बन्धन-ऊर्जा में होने वाली वृद्धि का मान लगभग 33 किकै०/मोल प्राप्त होता है [ग्लायकोलेट, मेंडलेट तथा लैक्टेट के लिये क्रमशः 32.96, 32.96 तथा 33.61 किकै०, मोल] जो इन तीनों संकुलों में लगभग समान विरूपण प्रदर्शित करता है। जान-टेलर विरूपण के कारण उत्पन्न अतिरिक्त स्थायीकरण, इन संकुलों में लीगैंड फील्ड विभाजन, △ तथा फलस्वरूप स्थायित्व के क्रम में परिवर्तन की व्याख्या स्पष्ट ही कर देता है।

निर्देश

1. जॉर्गेन्सन, सी० के०, **एडवांस केमि० फिजि०**, 1963, **5**, 33
2. फ्रेंकेलस्टेन, के० एस० तथा वानप्लेक, जे० एच०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1940, **8**, 790
3. ओर्गेल, एल० ई०, **केमि० सोसा०**, 1952, 4756.
4. कोलमान, आर० आई० तथा श्वार्टी, एफ० डब्लू०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1932, **54**, 3204.
5. चक्रवर्ती, पी० बी०, **पी-एच, डी० थिसिस**, 1973, **विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन**
6. बालहॉसेन, जे० के० Introduction to Ligand Field theory. **मेकग्राहिल न्यूयार्क**, 1962
7. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **साइंस एण्ड कल्चर**, 1973, **39**(8), 344
8. चक्रवती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **वही**, 1974,, **40**, 114
9. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **वही**, 1974, **40**(9), 407
10. हार्टफील्ड, डब्लू० ई०, फे, आर० सी०, फ्लुगी, एल० ई० तथा पाइपर, टी एस०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1963, **85**, 265

11. डार्गो, आर० एस०, मेक, डब्लू० एम० तथा जोइस्टर, एम० डी०, **इनार्ग० केमि०**, 1963, **2**, 124

12. बुल, डब्लू० ई० तथा जीग्लर, आर० सी०, **वही**, 1966, **5**, 689

13. जॉर्गेन्सन, सी० के०, Absorption Spectra and Chemical Bonding.

14. सार्टोरी, यू० तथा सहयोगी, **ऐकेड० लिन्सी० रेसी० साइं० फिक्ज० मेटे०**, 1963, **35**, 266

15. जान, एच० ऐ० तथा टेलर, ई०, **प्रोसी० राय० सोसा० (लंदन)** 1937, **A16a**, 320,

16. वूड, डी० एल०, फर्ग्यूसन, जे० नाक्स, के० तथा डिलॉन, एफ० जे०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1963, **39**, 890

17. जार्गेन्सन, सी० के०, **मोले० फिजि०**, 1962, **5**, 485

18. हार्टमेन, एच० तथा सहयोगी, **जर्न० फिजि० केमि०**, 1951, **197**, 116

19. हार्टमेन, एच० तथा सहयोगी, **वही**, 1956, **284**, 153

20. ईस्ले, एफ० ई० तथा हार्टमेन, एच०, **वही**, 1951, **197**, 239

21. जार्गेन्सन, सी० के०, **ऐक्टा० केमि० स्कैंडी०**, 1951, **11**, 73

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 1, January 1977, Pages, 85-89

समदैशिक समांग आयताकार समांतर षटफलक में ऊष्मा प्रवाह

बी० एस० मेहता
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, शाहपुरा (राजस्थान)
तथा
के० डी० शर्मा
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, चूरू (राजस्थान)

[प्राप्त—जुलाई 10, 1975]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में आयताकार समान्तर षटफलक में ऊष्मा प्रवाह पर विचार किया गया है जब कि आद्य ताप, पृष्ठों पर ऊष्मा अभिवाह तथा माध्यम में विकिरण शून्य होते हैं।

Abstract

Heat flow in an isotropic homogeneous rectangular parallelopiped. *By* B. S. Mehta, Department of Mathematics, Government College, Shahpura and K. D. Sharma, Department of Mathematics, Government College, Churu (Rajasthan).

Flow of heat in a rectangular parallelopiped when initial temperature, flux of heat to the surfaces and the radiation into the medium all are at zero has been considered.

1. निर्मेय सूत्रीकरण

यहाँ पर हम आयताकार समांतर षटफलक $0<x<a$, $0<y<b$, $0<z<c$ में ऊष्मा प्रवाह पर विचार करेंगे जबकि आद्य ताप को V_0 कल्पित किया गया है, $x=0$, $y=0$, $z=0$ पृष्ठों पर ऊष्मा अभिवह को शून्य मान लिया गया है तथा $x=a$, $y=b$, $z=c$, पृष्ठों पर शून्य ताप वाले माध्यम में विकिरण होता है।

ऊष्मा संचलन का समीकरण [1, p. 9]

$$\frac{\partial V}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]+A(x, y, z, t),\ t>0 \tag{1}$$

है जहाँ $V=V(x, y, z, t)$, $A(x, y, z, t)$ ऊष्मा स्रोत फलन है और K विसरणशीलता स्थिरांक है ।

आद्य तथा परिसीमा प्रतिबन्ध

$$V(x, y, z, t)\,|_{t=0}=V_0 \text{ (अचर)}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\Big|_{x=0}=\frac{\partial V}{\partial y}\,\Big|_{y=0}=\frac{\partial V}{\partial z}\,\Big|_{z=0}=0, \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}+h_1V\right]_{x=a}=\left[\frac{\partial V}{\partial y}+h_2V\right]_{y=b}=\left[\frac{\partial V}{\partial z}+h_3V\right]_{z=c}=0, \tag{4}$$

है जहाँ h_1, h_2 तथा h_3 विकिरण स्थिरांक हैं ।

2. हल

निमेय को हल करने के लिये उपयुक्त परिवर्त [2, p. 80]

$$\bar{V}(p, y, z)=\int_0^a V(x, y, z)\cos px\, dx, \tag{5}$$

है जहाँ p समीकरण

$$p \tan pa=h_1 \tag{6}$$

का धन मूल्य है ।

खण्डशः समाकलन करने पर

$$\int_0^a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos px\, dx=\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos px\right]_0^a+p\int_0^a \frac{\partial V}{\partial x}\sin px\, dx$$

$$=\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos px+pV\sin px\right]_0^a-p^2\int_0^a V\cos px\, dx \tag{7}$$

दाहिने पक्ष का प्रथम पद (3) के द्वारा निम्नतर सीमा में लुप्त हो जाता है । किन्तु उच्चतर सीमा पर इसे निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है ।

$$\cos pa\left[\frac{\partial V}{\partial x}+p\tan pa\, V\right]_{x=a}$$

जो (4) तथा (6) के प्रयोग से लुप्त हो जाता है । इस प्रकार बाम पक्ष का समाकल $-p^2\bar{V}(p, y, z)$ में समानीत हो जाता है ।

जब परिवर्त (5) का सम्प्रयोग समीकरण (1) के x, y तथा z चरों में क्रमशः किया जाता है तो

$$\frac{d\bar{\bar{\bar{V}}}}{dt}+k(p^2+q^2+r^2)\bar{\bar{\bar{V}}}(p, q, r, t)=\bar{\bar{\bar{A}}}(p, q, r, t), \tag{8}$$

जहाँ
$$\left.\begin{matrix}\overline{\overline{V}}(p, q, r, t)\\ \overline{\overline{A}}(p, q, r, t)\end{matrix}\right| = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left.\begin{matrix}V(x, y, z, t)\\ A(x, y, z, t)\end{matrix}\right| \times$$
$$\cos px \cos qy \cos rz \, dx \, dy \, dz, \tag{9}$$

तथा p, q, r क्रमशः

$$\begin{aligned} p \tan pa &= h_1, \\ q \tan qb &= h_2, \\ r \tan rc &= h_3, \end{aligned} \tag{10}$$

समीकरणों के धन मूल हैं।

(8) का हल इस प्रकार है :

$$\overline{\overline{V}}(p, q, r, t) = V_0 \, e^{-k(p^2+q^2+r^2)t} \frac{\sin pa}{p} \frac{\sin qb}{q} \frac{\sin rc}{r}$$
$$+ \int_0^t \overline{\overline{A}}(p, q, r, \lambda) \, e^{-k(p^2+q^2+r^2)(t-\lambda)} \, d\lambda \tag{11}$$

अतः ताप $V(x, y, z, t)$ को प्रतिलोमन श्रेणी

$$V(x, y, z, t) = 8 \sum_p \sum_q \sum_r \frac{(p^2+h_2^2)\cos px}{[a(p^2+h_1^2)+h_1]} \frac{(q^2+h_1^2)\cos qy}{[b(q^2+h_2^2)+h_2]} \frac{(r^2+h_3^2)\cos rz}{[c(r^2+h_3^2)+h_3]}$$
$$\times \Big[V_0 \, e^{-k(p^2+q^2+r^2)t} \frac{\sin pa}{p} \frac{\sin qb}{q} \frac{\sin rc}{r}$$
$$+ \int_0^t \overline{\overline{A}}(p, q, r, \lambda) \, e^{-k(p^2+q^2+r^2)(t-\lambda)} \, d\lambda \Big] \tag{11}$$

से प्राप्त किया जाता है।

3. विशिष्ट दशायें

(i) यदि $h_1 = h_2 = h_3 = 0$,

तो ताप वितरण

$$V(x, y, z, t) = \frac{8}{abc} \sum_p \sum_q \sum_r \cos px \cos qy \cos rz$$
$$\times \Big[V_0 \, e^{-k(p^2+q^2+r^2)t} \frac{\sin pa}{p} \frac{\sin qb}{q} \frac{\sin rc}{r}$$

$$+\int_0^t \overline{\overline{A}}(p, q, r, \lambda)\, e^{-k(p^2+q^2+r^2)(t-\lambda)}\, d\lambda \qquad (13)$$

ऐसी दशा के लिये प्राप्त होता है जब छहों फलकों पर कोई उष्मा अभिवाह नहीं होता और निम्न समीकरणों के घन मूलों का संकलन किया जाता है ।

$$\tan pa=0,$$

$$\tan qb=0,$$

$$\tan rc=0.$$

(ii) यदि $h_1=h_2=h_3\to\infty$,

तो हमें (13) द्वारा प्रदर्शित ताप वितरण प्राप्त होता किन्तु

$$\cos pa=0, \cos qb=0, \cos rc=0,$$

समीकरणों के घन मूलों का संकलन उस अवस्था के लिये किया जाता है जब $x=0$, $y=0$ तथा $z=0$ फलकों पर ऊष्मा अभिवाह नहीं होता और $x=a$, $y=b$, $z=c$ शून्य ताप पर स्थिर रखे जाते हैं ।

(iii) विन्दु $(a/2, b/2, c/2)$ पर जिसका आद्य ताप शून्य है, A_0 शक्ति का बिन्दु स्रोत स्थित है।

ऐसी दशा के लिये नियन्त्रक समीकरण तथा आद्य प्रतिबन्ध

$$\frac{\partial V}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)+\frac{A_0}{\rho c_0}\,\delta(x-a/2)\,\delta(y-b/2)\,\delta(z-c/2),$$

$$V(x, y, z, t)\,|_{t=0}=0,$$

होगा जहाँ ρ घनत्व है और c_0 (ताप V पर) ठोस की विशिष्ट ऊष्मा है ।

इस दशा में हल होगा :

$$V(x, y, z, t)=\frac{8A_0}{\rho C_0}\sum_p\sum_q\sum_r \frac{(p^2+h_1^2)\cos px\,(q^2+h_2^2)\cos qy\,(r^2+h^2)\cos rz}{a(p^2+h_1^2)+h_1]\,[b(q^2+h_2^2)+h_2]\,[c(r^2+h_3^2)+h_3]}$$

$$\cos(1/2\, pa)\cos(1/2\, qb)\;\cos(1/2)\, rc)\int_0^t e^{-k(p^2+q^2+r^2)(t-\lambda)}\, d\lambda \qquad (14)$$

(iv) a भुजा वालों घन जिसका आद्य ताप शून्य है, समस्त फलकों पर ऊष्मा अभिवाह नहीं होता और बिन्दु स्रोत घन के केन्द्र पर है।

यदि $a=b=c$,

$h_1=h_2=h_3=0$,

तो ताप वितरण

$$V(x, y, z, t)=\frac{8A_0}{a^3\rho c_0}\sum_p \sum_q \sum_r \cos px \cos qy \cos rz \cos \tfrac{1}{2} pa \cos \tfrac{1}{2} qa \cos \tfrac{1}{2} ra$$

$$\times\int_0^t e^{-k} (p^2+q^2+r^2) (t-\lambda)\, d\lambda, \qquad (15)$$

द्वारा दिया जावेगा जहाँ $p-q$ तथा r समीकरण $\tan \alpha a=0$ के धन मूल हैं ।

निर्देश

1. कार्सला, एच० एस० तथा जीगर, जे० सी० Conduction of Heat in Solid, 1959
2. ट्रैंटर, सी० जे०, Integral transform in Mathematical Physics, Methuen's Monographs on Physical subjects, मेथु एन तथा कम्पनी लि०, न्यूयार्क

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April 1977, Pages 91-95

दो चरों वाले H-फलन की कतिपय अनन्त श्रेणियाँ

वी० बी० एल० चौरसिया
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त—मार्च 22, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों वाले H-फलन के लिये कतिपय अनन्त श्रेणियाँ प्राप्त करना है। प्राप्त फल होरा द्वारा दिये गये फलों के सार्वीकरण हैं।

Abstract

On some infinite series of H-function of two variables. *By* V. B. L. Chaurasia, Department of Mathematics, Malaviya Regional Engineering College, Jaipur

The aim of this paper is to obtain some infinite series of H-function of two variables. The results are in generalisations of the results given by Hora[2].

1. परिभाषा

मित्तल तथा गुप्ता[1] द्वारा प्रचारित दो चरों वाले H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा।

$$H(z_1, z_2) = H\left[\begin{array}{l|l} (o,\ u) & (a_s, A_s, R_s) \\ (s,\ t) & (b_t, B_t, L_t) \\ & \\ (m,\ n) & (c_p, C_p) \\ (p,\ q) & (d_q, D_q) \\ & \\ (M,\ N) & (e_P, E_P) \\ (P,\ Q) & (f_Q, F_Q) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)} \int_{L_1} \int_{L_2} \theta(y, z)\phi_1(y)\,(\phi_2(z)\tau_1^{y}\,\tau_2^{z}\,dy\,dz$$

जहाँ $$\theta(y,z)=\frac{\prod_{i=1}^{u}\Gamma(1-a_i+A_iy+R_iz)}{\prod_{i=u+1}^{s}\Gamma(a_i-A_iy-R_iz)\prod_{i=1}^{t}\Gamma(1-b_i+B_iy+L_iz)}$$

$$\varphi_1(y)=\frac{\prod_{1=1}^{m}\Gamma(d_i-D_iy)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-c_i+C_iy)}{\prod_{1=m+1}^{q}\Gamma(1-d_i+D_iy)\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(c_i-C_iy)}$$

$$\varphi_2(z)=\frac{\prod_{i=1}^{M}\Gamma(f_i-F_iz)\prod_{i=1}^{N}\Gamma(1-e_i+E_iz)}{\prod_{i=M+1}^{Q}\Gamma(1-f_i+F_iz)\prod_{i=N+1}^{P}\Gamma(a_i-E_iz)}$$

z_1 तथा z_2 शून्य नहीं हैं तथा रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है। अनृण पूर्णांक $u, s, t, m, n, p, q, M, N, P$ तथा Q ऐसे हैं कि

$$0\leqslant u\leqslant s,\ t\geqslant 0,\ 0\leqslant n\leqslant p,\ 0\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant N\leqslant P,\ 0\leqslant M\leqslant Q$$

जहाँ अक्षर A, B, C, D, E, F, R एवं L सभी धन हैं।

कंटूर L_1 तथा L_2 उपयुक्त हैं और समाकल्य के समस्त पोल सरल मान लिये गये हैं। फलन $H(z_1, z_2)$ को वैश्लेषिक फलन सूचित करने के प्रतिबन्ध तथा (1·1) में दिये गये समाकलन के अभिसारी होने के प्रतिबन्ध मित्तल तथा गुप्ता[3] ने दिये हैं। सम्पूर्ण प्रपत्र में यह मान लिया गया है कि दो चरों वाले H-फलन से इन प्रतिबन्धों की तुष्टि हो जाती है।

$$(a_i, A_i, R_i)_{1,\ p} \text{ या } (a_p, A_p, R_p)$$

से अनुक्रम

$$(a_1, A_1, R_1), \ldots, (a_p, A_p, R_p)$$

का द्योतन होता है।

2. अनन्त श्रेणी

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{2a-2-r}\,w^r}{r!}H\left[\begin{array}{l|l|l} (o,u) & (a-r,h,k)\ (a_i,A_i,R_i)_{2,\ s} & \\ (s,t) & (b_t,B_t,L_t) & \\ (m,n) & (c_p,C_p) & z_1x^{-2h} \\ (p,q) & (d_q,D_q) & z_2x^{-2k} \\ (M,N) & (e_p,E_p) & \\ (P,\ Q) & f_Q,F_Q)) & \end{array}\right]$$

$$=(x^2-wx)^{a-1}\ H\left[\begin{array}{l|l|l}(o,u) & (1-a,h,k),(a_i,A_i,R_i)_{2,s} & \\ (s,t) & (b_t,B_t,L_t) & \\ (m,n) & (c_p,C_p) & z_1(x^2-wx)^{-h} \\ (p,q) & (d_q,D_q) & z_2(x^2-wx)^{-k} \\ (M,N) & (e_p,E_p) & \\ (P,Q) & (f_Q,F_Q) & \end{array}\right] \quad (2\cdot1)$$

जहाँ $\left|\frac{w}{z}\right|<1.$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(k,r)}{r!}H\left[\begin{array}{l|l|l}(o,u) & (a_s,A_s,R_s) & \\ (s,t) & (b_t,B_t,L_t) & \\ (m+1,n+1) & (a-k-r,w),(c_p,C_p),(a+r,w) & z_1 \\ (p+2,q+2) & (b+k+r,w),(d_q,D_q),(b-r,w) & z_2 \\ (M,N) & (e_p,E_p) & \\ (P,Q) & (f_Q,f_Q) & \end{array}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)\Gamma(a-b-3/2k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(a-b-k)}$$

$$\times H\left[\begin{array}{l|l|l}(o,u) & (a_s,A_s,R_s) & \\ (s,t) & (b_t,B_t,L_t) & \\ (m+1,n+1) & (a-k,w),(c_p,C_p),\left(a-\frac{k}{2},w\right) & z_1 \\ (p+2,q+2) & (b+k,w),(d_q,D_q),\left(b+\frac{k}{2},w\right) & z_2 \\ (M,N) & (e_p,E_p) & \\ (P,Q) & (f_Q,F_Q) & \end{array}\right] \quad (2\cdot2)$$

जहाँ $Re\ (2a-2b-3k)>0.$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(h+2r)\Gamma(h+r)(h-a+1)_r(k)_r\Gamma(a-k)}{r!\ \Gamma(a+r)\Gamma(h-k+1+r)}$$

$$\times H\left[\begin{array}{l|l|l}(o,u) & (a_s,A_s,R_s) & \\ (s,t) & (b_t,B_t,L_t) & \\ (m+1,n) & (c_1-r,w),(c_i,C_i)_{2,p},(h+c_1+r,w),(a+c_1-k-1,w) & z_1 \\ (p+2,q+1) & (h+c_1-k,w),(d_q,D_q) & z_2 \\ (M,N) & (e_p,E_p) & \\ (P,Q) & (f_Q,F_Q) & \end{array}\right]$$

$$=H\left[\begin{array}{l|l|l}(o,u) & (a_s,A_s,R_s) & \\ (s,t) & (b_t,B_t,L_t) & \\ (m,n) & (c_1,w),(c_i,C_i)_{2,p},(a+c_1-1,w) & z_1 \\ (p+1,q) & (d_q,D_q) & z_2 \\ (M,N) & (e_P,E_P) & \\ (P,Q) & (f_Q,F_Q) & \end{array}\right] \quad (2\cdot3)$$

जहाँ $Re\,(a-K)>0$

उपपत्ति

(2·1) को सिद्ध करने लिये हम (2·1) के वामपक्ष के H-फलन को (1·1) की भाँति व्यक्त करते हैं, संकलन का क्रम बदलते हैं और सूत्र ${}_1F_0\,(a;\,-;\,x)=(1-x)^{-a}$ का व्यवहार करते हुये अन्त में (1·1) की सहायता से व्याख्या करते हैं।

फल (2·2) तथा (2·3) भी उपर्युक्त विधि से अग्रसर होकर एवं सूत्र (2, p. 362) का उपयोग करके प्राप्त किये जा सकते हैं।

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}a,\,b,\,c; \\ a-b+1,\,a-c+1\end{matrix};\,1\right\}=\frac{\Gamma(a/2+1)\Gamma(a-b+1)\Gamma(a-c+1)\Gamma(a/2-b-c+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(a/2-b+1)\Gamma(a/2-c+1)\Gamma(a-b+c+1)},$$

$Re\,(a-2b-2c)>-2.$

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}a,\,a/2+1,\,b,\,c,\,d; \\ a/2,\,a-b+1,\,a-c+1,\,a-d+1\end{matrix};\,1\right]$$

$$=\frac{\Gamma(a-b+1)\Gamma(a-c+1)\Gamma(a-d+1)\Gamma(a-b-c-d+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(a-b-c+1)\Gamma(a-c-d+1)\Gamma(a-d-b+1)},$$

$R(a-b-c-d)>-1.$

का व्यवहार करते हैं।

3. विशिष्ट दशायें

(2·1) में $A_i=R_i\ (i=1,\,\ldots,\,s)$, $B_j=L_j\ (j=1,\,\ldots,\,t)$ तथा $h\to0$ रखने पर, तथा थोड़े से सरलीकरण के अनन्तर हमें होरा द्वारा प्राप्त फल [1, p. 181 (2·4)] मिलता है।

सूत्र (2·2) तथा (2·3) की विशिष्ट दशायें जब $A_i=R_i$, $(i=1,\,\ldots,\,s)$, $B_j=L_j$, $(j=1,\,\ldots,\,t)$, होरा[1] ने दे रखी हैं।

चूंकि दो चरों वाला G-फलन तथा अन्य कई फलन दो चरों वाले H-फलन की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं अतः कई अन्य फलनों के लिये भी हमारे फलों की विशिष्ट दशाओं के रूप में श्रेणियों का निगमन किया जा सकता है।

निर्देश

1. होरा, एन० एस०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1974, **17**, 177-183
2. मैकराबर्ट, टी० एम०, Functions of a Complex Variables, लन्दन 1962
3. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस**, 1972, **75A**, 117-23

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April 1977, Pages 97-104

दो चरों के सामान्यीकृत फलन की कुछ अनन्त श्रेणियां

ह० स० प्र० श्रीवास्तव
ई० 20, साकेत नगर, इन्दौर

[प्राप्त—नवम्बर, 21, 1976]

सारांश

इस शोधपत्र में दो चरों के सामान्यीकृत फलन की अनन्त श्रेणियों का मूल्यांकन किया गया है। दो चरों के सामान्यीकृत फलन को द्वि-मेलिन-बार्नीज प्रकार के सामाकल के रूप में व्यक्त करके, समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर परिवर्तित करते हुए विभिन्न हाइपरज्यामितीय ज्ञात सम्बन्धों के प्रयोग से आन्तरिक श्रेणियों को (मूल्यांकन कर) संकलित किया गया है।

Abstract

Some infinite series involving a generalized functiou of two variables. *By* H. S. P. Srivastava, E-20, Saketnagar, Indore.

In this paper we have evaluated a number of infinite series involving generalized function of two variables by expressing the generalized function of two variables as double Mellin-Barnes type contour integral, interchanging the order of integration and summation and evaluating the inner hypergeometric functions by using various known relations.

1. भूमिका

मौर्य[6] ने दो चरों के सामान्यीकृत फलन को मेलिन-बार्नीज के द्वि-समाकल के रूप में प्रचलित किया, जिसे सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जायेगा।

$$M^{(m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3)}_{(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3)}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}]; [c_{p_2}, C_{p_2}]; [e_{p_3}, E_{p_3}] \\ [b_{q_1}, B_{q_1}]; [d_{q_2}, D_{q_2}]; [f_{q_3}, F_{q_3}] \end{matrix}\right] \quad (1{\cdot}1)$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right) \int_L \int_T m(s+t)\, n(s, t)\, x^s y^t\, ds\, dt,$$

$$m(s+t)=\frac{\prod_1^{m_1} \Gamma(b_j-B_js-B_jt) \prod_1^{n_1} \Gamma(1-a_j+A_js+A_jt)}{\prod_{m_1+1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+B_js+B_jt) \prod_{n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j-A_js-A_jt)}, \tag{1·2}$$

$$n(s, t)=\frac{\prod_1^{m_2} \Gamma(d_j-D_js) \prod_1^{n_2} \Gamma(1-c_j+C_js) \prod_1^{m_3} \Gamma(f_j-F_jt) \prod_1^{n_2} \Gamma(1-e_j+E_jt)}{\prod_{m_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+D_js) \prod_{n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-C_js) \prod_{m_2+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+F_jt) \prod_{n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-E_jt)} \tag{1·3}$$

तथा $[\alpha_r, \beta_r]$ प्राचलों के समुच्चय $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots; (\alpha_r, \beta_r)$ को निरूपित करता है ।

समाकल (1·1) पूर्णतया अभिसारी होगा, यदि

$$|\arg x| < \tfrac{1}{2}A\pi, \; |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi,$$

जहाँ
$$A=\left(\sum_1^{n_1} A+\sum_1^{n_2} C+\sum_1^{m_1} B+\sum_1^{m_2} D\right)-\left(\sum_{n_1+1}^{p_1} A+\sum_{n_2+1}^{p_2} C+\sum_{m_1+1}^{q_1} B+\sum_{m_2+1}^{q_2} D\right), \tag{1·4}$$

और

$$B=\left(\sum_1^{n_1} A+\sum_1^{n_3} E+\sum_1^{m_1} B+\sum_1^{m_3} F\right)-\left(\sum_{n_1+1}^{p_1} A+\sum_{n_3+1}^{p_3} E+\sum_{m_1+1}^{q_1} B+\sum_{m_3+1}^{q_3} F\right) \tag{1·5}$$

द्वि कन्टूर समाकल (1·1) को संक्षिप्त में $M(x, y)$ लिखेंगे । हम दो चरों के सामान्यीकृत फलन में केवल उन्हीं प्राचलों को लिखेंगे जिसमें कोई परिवर्तन हुआ है, जैसे

$$M^{(m_1+1,\, m_2,\, m_3),\, (n_1+1,\, n_2,\, n_3)}_{(p_1+2,\, p_2,\, p_3),\, (q_1+2,\, q_2,\, q_3)}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\left| \begin{matrix} (\alpha, k), [a_{p_1}, A_{p_1}], (\delta, k); [c_{p_2}, C_{p_2}]; [e_{p_3}, E_{p_3}] \\ (\beta, k), [b_{q_1}, B_{q_1}], (t, k); [d_{q_2}, D_{q_2}]; [f_{q_3}, F_{q_3}] \end{matrix}\right.\right]$$

को

$$M^{m_1+1,\, n_1+1}_{p_1+2,\, q_1+2}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\left| \begin{matrix} (\alpha, k), [a_{p_1}, A_{p_1}], (\delta, k) \\ (\beta, k), [b_{q_1}, B_{q_1}], (t, k) \end{matrix}\right.\right]$$

लिखेंगें तथा संकेत $\left(\alpha+\left|\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}\right|, h\right)$ प्राचलों के समुच्चय $(\alpha+r_1, h), (\alpha+r_2, h), (\alpha+r_3, h)$ के लिये उपयोग में लाया गया है ।

2. इस विभाग में हम दो चरों के सामान्यीकृत फलन की कुछ अनन्त श्रेणियों का मूल्यांकन करेंगे।

(i) **प्रथम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-d)^r}{r!} M_{p_1, q_1+1}^{m_1+1, n_1} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}] \\ (b+t, h), [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right] \tag{2·1}$$

$$=(1+d)^{-b} M_{p_1, q_1+1}^{m_1+1, n_1} \left[\begin{matrix} x(1+d)^h \\ y(1+d)^h \end{matrix} \middle| \begin{matrix}]a_{p_1}, A_{p_1}] \\ (b, b), [_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right],$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|d| < 1$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$

उपपत्ति

बांई ओर के M-फलन को द्वि-मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में व्यक्त करने पर, समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलने पर, यह श्रेणी

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_T m(s+t) n(s, t)\, x^s\, y^t\, {}_1F_0 (b-hs-ht; -; -d)\, ds\, dt$$

में परिणत हो जाती है। किन्तु

$${}_1F_0 (b-hs-ht; -; -d)=(1-d)^{-b+hs+ht}$$

अत: (1·1) का उपयोग करने पर दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

(ii) **द्वितीय संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} M_{p_1+1, q_1+2}^{m_1+2, n_1} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}], (c+r, h) \\ (a+r, h), (b+r, h), [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right] \tag{2·2}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} M_{p_1+1, q_1+2}^{m_1+2, n_1+1} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a+b-c+1, h), [a_{p_1}, A_{p_1}] \\ (a, h), (b, h), [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right],$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, $Re\,(c-a-b)>0$.

उपपत्ति

बांई ओर के M-फलन को द्वि-मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल (1·1) के रूप में अभिव्यक्त करने पर, संकलन तथा समाकलन का क्रम बदलने पर, हमें

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_T m(s+t)\, n(s, t)\, x^s\, y^t\, \frac{\Gamma(a-hs-ht)\Gamma(b-hs-ht)}{\Gamma(c-hs-ht)}$$
$$\times {}_2F_1 (a-hs-ht, b-hs-ht; c-hs-ht; 1)\, ds\, dt,$$

की प्राप्ति होगी। गास प्रमेय [7, p. 243 (2)] तथा (1·1) का उपयोग करने पर वांछित फल की प्राप्ति होगी।

(iii) **तृतीय संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} M_{p_1+1,\ q_1+2}^{m_1+1,\ n_1+1} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (b-r,\ h),\ [a_{p_1},\ A_{p_1}] \\ (a+r,\ h),\ [b_{q_1},\ B_{q_1}],\ (c-r,\ h) \end{matrix}\right] \tag{2·3}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(b-c)} M_{p_1+2,\ q_1+2}^{m_1+1,\ n_1+2} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (b,\ h),\ (1+a+c-b,\ h),\ [a_{p_1},\ A_{p_1}] \\ (a,\ h),\ [b_{q_1},\ B_{q_1}],\ (c+a,\ 2h) \end{matrix}\right]$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, $Re\,(b-a-c) > 0$.

उपपत्ति

(2·2) की भांति अग्रसर होने पर वांछित फल की प्राप्ति होगी।

(iv) **चतुर्थ संकलन**

$$2^{2a} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (b+1)_{r+1}}{r!} M_{p_1+1,\ q_1+1}^{m_1+1,\ n_1} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1},\ A_{p_1}],\ (a-h),\ (2a-b+r,\ 2h) \\ (2a+r,\ 2h),\ [b_{q_1},\ B_{q_1}] \end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

$$= M_{p_1+2,\ q_1+1}^{m_1+1,\ n_1} \left[\begin{matrix} x2^{2h} \\ y2^{2h} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1},\ A_{p_1}],\ (a-b-1/2,\ h) \\ (2a,\ 2h),\ [b_{q_1},\ B_{q_1}] \end{matrix}\right]$$

$$- M_{p_1+2,\ q_1+1}^{m_1+1,\ n_1} \left[\begin{matrix} x2^{2h} \\ y2^{2h} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1},\ A_{p_1}],\ (a+1/2,\ h)(a-b-1,\ h) \\ (2a,\ 2h),\ [b_{q_1},\ B_{q_1}] \end{matrix}\right],$$

जहाँ r धनात्मक संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, $2a-b \neq 0, -1, -2, \ldots$

उपपत्ति

बांई ओर के M-फलन को द्वि-मेलिन-बार्नीज के समाकल (1·1) के रूप में अभिव्यक्त करने पर, श्रेणी का परिवर्तित रूप

$$2^{2a}(b+1)\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_T m(s+t)\, n(s,\ t)\, x^s\, y^t \frac{\Gamma(2a-2hs-2ht)}{\Gamma(2a-2hs-2ht-b)}$$

$$\times {}_2F_1\,(2a-2hs-2ht,\ b+2;\ 2a-b-2hs-2ht;\ -1)\, ds\, dt$$

होगा। प्रमेय [5, p. 110 (4·17)[तथा (1·1) का उपयोग करने से वांछित परिणाम प्राप्त होगा।

(v) **पंचम संकलन**

(2·4) को भांति अग्रसर होने पर, संकलन

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} M^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+2} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}], (a+b+r, 2h) \\ (2a+r-1, 2h), (2b+r-1, 2h), [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix} \right] \quad (2\cdot5)$$

$$= M^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+2,\, q_1+2} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}], (a-1/2, h), (b, h) \\ (2a-1, 2h), (2b-1, 2h), [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix} \right]$$

$$- M^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+2,\, q_1+2} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}], (b-1/2, h), (a, h) \\ (2a-1, 2h)(2b-1, 2h), [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix} \right],$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, $2a+2b-2 \neq -2, -4, -6, \ldots$ की स्थापना प्रमेय [5, p. 110 (4·1·8)] की सहायता से की जा सकती है।

(vi) **षष्ठम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k)_r}{r!} M^{m_1+1,\, n_1+1}_{p_1+2,\, q_1+2} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\alpha-k-r, h), [a_{p_1}, A_{p_1}], (\alpha+r, h) \\ (\beta+k+r, h), [b_{q_1}, B_{q_1}], (\beta-r, h) \end{matrix} \right] \quad (2\cdot6)$$

$$= \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}k)\Gamma(\alpha-\beta-\frac{3}{2}k)}{\Gamma(1+k)\Gamma(\alpha-\beta-k)} M^{m_1+1,\, n_1+1}_{p_1+2,\, q_1+2} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\alpha-k, h), [a_{p_1}, A_{p_1}], (\alpha-\frac{1}{2}k, h) \\ (\beta+k, h), [b_{q_1}, B_{q_1}], (\beta+\frac{1}{2}k, h) \end{matrix} \right]$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, $Re\,(2\alpha-2\beta-3k) > 0$.

उपपत्ति

बांई ओर के M-फलन को द्वि मेलिन-बार्नीज समाकल (1·1) के रूप में अभिव्यक्त करने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, श्रेणी का परिवर्तित स्वरूप

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_{L'} m(s+t)\, n(s, t)\, x^s\, y^t \frac{\Gamma(\beta+k-hs-ht)\Gamma(1-\alpha+k+hs+ht)}{\Gamma(\alpha-hs-ht)\Gamma(1-\beta+hs+ht)}$$

$$\times {}_3F_2\,(k, \beta+k-hs-ht, 1-\alpha+k+hs+ht;\, 1-\beta+hs+ht, \alpha-hs-ht;\, 1)\, ds\, dt,$$

हो जावेगा, और डिक्सन प्रमेय [7, p. 243 (111·8)] तथा (1·1) के उपयोग पर दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

(vii) **सप्तम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2a)_r (2b)_r}{(a+b+\frac{1}{2})_r\, r!} M^{m_1+1,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+1} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}], (2c+r, 2h) \\ (c+r, h), [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix} \right] \quad (2\cdot7)$$

$$=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)}$$

$$\times M^{m_1+3,\, n_1}_{p_1+3,\, q_1+3}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}],\ (2c, 2h),\ (c+\frac{1}{2}-\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right|, h) \\ (c, h),\ (c+\left|\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-a-b \end{matrix}\right|, h),\ [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right],$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, $Re\,(c-a-b) > -\frac{1}{2}$

उपपत्ति

(2·6) की भांति अग्रसर होने पर तथा डिक्सन प्रमेय के बजाय वास्टन प्रमेय [7, p. 245 (III·23)] का उपयोग करने पर उपर्युक्त संकलन की स्थापना सरलता से की जा सकती है।

(viii) **अष्टम संकलन**

(2·6) की भांति अग्रसर होने पर, संकलन

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r(b)_r}{r!\,(a+b+\frac{1}{2})_r} M^{m_1+1,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}],\ (c+r+1/2, h) \\ (c+r, h),\ [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right] \tag{2·8}$$

$$=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)} M^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+2,\, q_1+2}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}],\ (c-a+\frac{1}{2}h),\ (c-b+\frac{1}{2}, h) \\ (c, h),\ (c-a-b+\frac{1}{2}, h),\ [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right],$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, की स्थापना मैकराबर्ट के परिणाम [4] अर्थात्

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} \alpha, \beta, r \\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}; \end{matrix}\ 1\right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\Gamma(r-\alpha-\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\beta+\frac{1}{2})\Gamma(r-\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(r-\beta+\frac{1}{2})} \tag{2·9}$$

से की जा सकती है।

(ix) **नवम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2a)_r(1-2a)_r}{r!\,(2d)_r} M^{m_1+1,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}],\ (2c-2d+1+r, h) \\ (c+r, h),\ [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right] \tag{2·10}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{2d-2c}\,\Gamma(d)\,\Gamma(d+1/2)}{\Gamma(a+d)\,\Gamma(d-a+1/2)}$$

$$\times M^{m_1+1,\, n_1}_{p_1+2,\, q_1+1}\left[\begin{matrix} 2^{2h}x \\ 2^{2h}y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [a_{p_1}, A_{p_1}],\ (a+c-d+1/2, h),\ (c+1/2, h) \\ (c, h),\ [b_{q_1}, B_{q_1}] \end{matrix}\right],$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, $Re\,(c) > 0$.

उपपत्ति

वांई ओर के M-फलन को द्वि-मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल (1·1) के रूप में अभिव्यक्त करने पर, संकलन तथा समाकल का क्रम परिवर्तित करने पर, हमें

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_T m(s+t)\, n(s,t)\, \frac{\Gamma(c-hs-ht)}{\Gamma(2c-2d+1-2hs-2ht)}$$
$$\times {}_3F_2\,(2a, 2b, c-hs-ht;\, 2d, 2c-2d+2hs-2ht;\, 1)\, dx^s\, y^t\, ds\, dt,$$

की प्राप्ति होगी। ह्विपल प्रमेय [7, p. 245 (III·24)] तथा (1·1) के प्रयोग करने से परिणाम की प्राप्ति होगी।

(x) **दशम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\,(d+1)} M^{m_1+1,\, n_1+2}_{p_1+2,\, q_1+2} \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a-r, 2h), (c-r, h)[a_{p_1}, A_{p_1}] \\ (a+r, 2h), [b_{q_1}, B_{q_1}], (2c+d-1-r, (2h)) \end{matrix}\right] \quad (2\cdot11)$$

$$= \frac{\pi 2^{2c-1}\, \Gamma(d+1)}{\Gamma(1-c-\frac{1}{2}(d-a))}$$

$$\times M^{m_1+1,\, n_1+3}_{p_1+4,\, q_1+3} \left[\begin{matrix} 2^{-2h}x \\ 2^{-2h}y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a, 2h), (c, h), (2c+d+1, h), [a_{p_1}, A_{p_1}], (\frac{1}{2}(1+a+d), h) \\ (a, 2h), [b_{a_1}, B_{q_1}], (c-1/2, h), (\frac{1}{2}(a-d), h) \end{matrix}\right]$$

जहां r धनात्मक पूर्ण संख्या है, $h \geqslant 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}A\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}B\pi$, $Re\,(1-c) > 0$

उपपत्ति

(2·10) की भांति अग्रसर होने पर वांछित फल की प्राप्ति होगी।

परिणामों में व्यक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत उपर्युक्त संकलन की उत्पत्ति में समाकलन एवं संकलन के क्रम का प्रतिपादन [3, p. 176 (75)] के अनुरूप है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० पी० आनन्दानी का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने प्रस्तुत शोध पत्र की तैयारी में मेरा मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. आनन्दानी, पी०, **मैथ० स्टूडेन्ट**, 1967, 37, 117-123

2. वही, **विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका**, 1970, **13**, 57-67

3. कार्सल, एच० एस०, Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals डोवर पब्लीकेशन्स, न्यूयार्क, 1950

4. मैकराबर्ट, टी० एन०, प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०, 1958, 3, 96

5. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Lecture Notes in Mathematics स्प्रींगर वरलाग, न्यूयार्क, 1973

6. मौर्य, डी० पी०, पी० एच-डी०, थीसिस, युनिवर्सिटी आफ इन्दौर, इन्दौर, 1970

7. स्लाटर, एल० जे०, Generalized Hypergeometric Function, कैम्ब्रिज, 1966

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No 2, April, 1977, Pages 105-108

अतिज्यामितीय श्रेणी $_4F_3$ का एक रूपान्तरण

वीरेन्द्र कुमार तथा बी० एम० अग्रवाल

शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—नवम्बर 25, 1976]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में $_4F_3$ रूपान्तरण का नवीन हल प्रस्तुत किया गया है ।

Abstract

Conversion of extreme geometrical theorem $_4F_3$. *By* Virendra Kumar and B. M. Agrawal, Government Degree College, Gwalior.

In this note a new proof of the transformation [Agrawal, B. M. 1973] of $_4F_3$ has been obtained.

1. प्रस्तावना

हिल (1907-1908) तथा ह्विपल (1930) ने अनेक इस प्रकार के फल प्रदान किये जो गास श्रेणी के प्रथम n पदों के योग को अपरिमित $_3F_2(1)$ श्रेणी के रूप में व्यक्त करते हैं। रामानुजम ने भी एक इसी प्रकार की तत्समिका प्रदान की जो n पदों के योग को m पदों के रूप में व्यक्त करती है । रामानुजम की इस तत्समिका की उपपत्ति डार्लिंग (1931) तथा वाटसन[1] (1930) द्वारा दी गई । इसके विभिन्न सार्वीकृत फल बैली तथा हाडकिन्सन (1931) ने प्रदान किये । कुछ समय पूर्व अग्रवाल[2] ने अन्तरआपरेटरों के व्यवहार द्वारा $_4F_3(1)$ का एक नवीन रूपान्तरण प्रयुक्त किया जिसका उद्देश्य गास श्रेणी के n पदों के योग को m पदों के योग के रूप में व्यक्त करना है ।

2. अग्रवाल की तत्समिका

$$\frac{\Gamma(e-a)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma e\Gamma(e-a-b)\}}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix} v+n-1, -m+1, a, b; \\ v, e, 1+a+b-e-m+n \end{matrix} 1\right]$$

$$=\frac{\Gamma(e-a+m-n)\,\Gamma(e-b+m-n)}{\Gamma(e+m-n)\,\Gamma(e-a-b+m-n)}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\nu+m-1, -n+1, a, b;\ 1\\ \nu, e+m-n, 1-e+a+b\end{matrix}\right]$$

की सरल उपपत्ति ही प्रस्तुत शोध पत्र का विषय है।

3. उपपत्ति

इस तत्समिका की उपपत्ति सामान्यीकृत सालसुट्ज प्रमेय[3] पर आधारित है। सामान्यीकृत सालसुट्ज प्रमेय के अनुसार

$${}_{p+2}F_{p+1}\left[\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, -n;\ 1\\ \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_p, S_{p+1}-\sigma_p-n+1\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(\sigma_p-S_p)_n(\rho_p-\alpha_{p+1})_n}{(\sigma_p-S_{p+1})_n(\rho_p)_n}\prod_{r=1}^{p-1}\sum_{n_r=0}^{n-\nu_{r-1}}$$

$$\left[\frac{(\sigma_r-S_r+\nu_{r-1})_{n_r}(\rho_r-\alpha_{r+1})_{n_r}(\nu_{r-1}-n)_{n_r}}{n_r!(\sigma_p-S_p+\nu_{r-1})_{n_r}(1-\rho_p+\alpha_{p+1}+\nu_{r-1}-n)_{n_r}}\,\frac{\prod_{t=r+2}^{p+1}(\alpha_t+\nu_{r-1})_{n_r}}{\prod_{t=r}^{p-1}(\rho_t+\nu_{r-1})_{n_r}}\right]$$

जहाँ कि

$$\sigma_p=\rho_1+\rho_2+\ldots\ldots\ldots\rho_p$$

$$S_p=\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots\ldots\alpha_p$$

तथा

$$\nu_r=n_1+n_2+\ldots\ldots\ldots n_r,\ \nu_0=0$$

अब $p=2$ लेने पर सालसुट्ज प्रमेय का स्वरूप

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3-n;\ 1\\ \rho_1, \rho_2, S_3-\sigma_2-n+1\end{matrix}\right]=\frac{(\sigma_2-S_2)_n(\rho_2-\alpha_3)_n}{(\sigma_2-S_3)_n(\rho_2)_n}\times\sum_{n1=0}^{n}\frac{(\sigma_1-S_1)n_1(\rho_1-\alpha_2)_{n1}(-n)n_1(\alpha_3)_{n1}}{n_1!(\sigma_2-S_2)_{n1}(1-\rho^2+\alpha_3-n)_{n1}(\rho_1)n_1}$$

$$=\frac{(\sigma_2-S_2)_n(\rho_2-\alpha_3)_n}{(\sigma_2-S_3)_n(\rho_2)_n}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}\sigma_1-S_1, \rho_1-\alpha_2, \alpha_3, -n;\ 1\\ \sigma_2-S_2, \rho_1, 1-\rho+\alpha_3-n\end{matrix}\right]$$

होगा । इस प्रकार

$$\frac{(\rho_1+\rho_2-a_1-a_2-\rho_3)_n(\rho_2)_n}{(\rho_1+\rho_2-a_1-a_2)_n(\rho_2-a_3)_n}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}a_1,\ a_2,\ a_3,-n;\ 1\\ \rho_1,\ \rho_3,\ a_1+a_2+a_3-\rho_1-\rho_2-n+1\end{matrix}\right]$$

$$={}_4F_3\left[\begin{matrix}a_1-a_1,\ \rho_1-a_2,\ a_3,-n;\ 1\\ \rho_1+\rho_2-a_1-a_2,\ \rho_1,\ 1-\rho_2-a_3-n\end{matrix}\right] \qquad (A)$$

$a_1, a_2, a_3, n, \rho_1, \rho_2$ को क्रमश: $v+n, a, b, m, v, e$ से स्थानान्तरित करने पर

$$\frac{(e-a-b-n)_m(e)_m}{(e-a-n)_m(e-b)_m}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}v+n,\ a,\ b,-m;\ 1\\ v,\ e,\ 1+a+b-e-m+n\end{matrix}\right]$$

$$={}_4F_3\left[\begin{matrix}-n,\ v-a,\ b,-m;\ 1\\ e-a-n,\ v,\ 1-e+b-m\end{matrix}\right] \qquad (B)$$

तत्समिका (A) में $a_1, a_2, a_3, \rho_1, \rho_2$ को क्रमश: $v+m, a, b, v, e+m-n$ से स्थानान्तरित करने पर

$$\frac{(e-a-b-n)_n(e+m-n)_n}{(e-a-n)_n(e+m-n-b)_n}\ {}_4F_6\left[\begin{matrix}v+m,\ a,\ b,-n;\ 1\\ v,\ e+m-n,\ 1-e+a+b\end{matrix}\right]$$

$$={}_4F_3\left[\begin{matrix}-m,\ v-a,\ b,-n;\ 1\\ e-a-n,\ v,\ 1-e+b-m\end{matrix}\right] \qquad (C)$$

यदि $m>n$ तो तत्समिका (B) गास श्रेणी के $m+1$ पदों के योग को $n+1$ पदों के योग के रूप में प्रदर्शित करती है। यदि $n>m$ तो तत्समिका (C) गास श्रेणी के $n+1$ पदों के योग को $m+1$ पदों के योग के रूप में प्रदर्शित करती है। । तत्समिकाओं (B) तथा (C) से हमें तत्समिका

$$\frac{(e-a-b-n)_m(e)_m}{(e-a-n)_m(e-b)_m}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}v+n,\ a,\ b,-m;\ 1\\ v,\ e,\ 1+a+b-e-m+n\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(e-a-b-n)_n(e+m-n)_n}{(e-a-n_n)(e+m-n-b)_n}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}v+m,\ a,\ b,-n;\ 1\\ v,\ e+m-n,1-e+a+b\end{matrix}\right] \qquad (D)$$

प्राप्त होती है जो गास श्रेणी के $m+1$ पदों के योग $n+1$ पदों के योग के रूप में प्रदर्शित करती है। इस तत्समिका को अधिक सरल रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\frac{\Gamma(e-a)\Gamma(e-b)}{\Gamma(e)\Gamma(e-a-b)}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}v+n,\ a,\ b,-m;\ 1\\ v,\ e,\ 1+a+b-e-m+n\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\{(e+m-n-b)\}\{(e-a+m-n)\}}{\{(e-a-b+m-u)\}\{e+m-n\}}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix} v+m, a, b, -n; 1 \\ v, e+m-n, 1-e+a+b \end{matrix}\right]$$

m को $m-1$ तथा n को $n-1$ से स्थानान्तरित करने पर हमें अग्रवाल द्वारा दी गई तत्समिका मिल जाती है जो कि गास श्रेणी के m पदों के योग को n पदों के योग के रूप में व्यक्त करती है।

निर्देश

1. स्लेटर, एल० जे०, जनरलाइज्ड हाइपरज्यामैट्रिक फंक्शन्स, कैम्ब्रिज 1966
2. अग्रवाल, बी० एम०, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका 1973, **16**, 169.
3. मैकराबर्ट, थामस एम०, फंक्सन्स ऑफ ए कम्प्लैक्स वैरिएबल, मैकमिलन 1962 पृष्ठ 365

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April, 1977, Pages 109-111

देहली-विभव पर हाइड्रोजन के दाब का प्रभाव

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ, कालेज, मेरठ

[प्राप्त-जुलाई 28, 1976]

सारांश

पारद-वाष्प-संदूषित हाइड्रोजन में देहली-विभव के अध्ययन से पता चला है कि 20 मिमी० (30°Cसें०) दाब से ऊपर किरणन के दौरान $V_m(L)$ अंधकार में $V_m(D)$ से अधिक होता है। इसका कारण $V_m(D)$ पर $-\triangle_i$ की उपस्थिति बताई गई है। तथापि, p_{H_2}=2 से 20 मिमी० तक $V_m(L)$ तथा $V_m(D)$ परस्पर समान पाये गये हैं। गैस दाब के साथ $V_m(D,L)$ पहले घटता तथा बाद में बढ़ता है।

Abstract

Influence of gas pressure on the threshold potential in hydrogen. *By* Jagdish Prashad, Chemsitry Department, Meerut College, Meerut

The study of the threshold potential V_m in mercury vapour contaminatend hydrogen has revealed that V_m under irradiation $V_m(L)$ at pressures over 20 mm (30°C) is higher than that in dark $V_m(D)$. This has been ascribed due to the occurrence of $-\triangle_i$ at $V_m(D)$. However, at p_{H_2}=2 to 20 mm, $V_m(L)$ and $V_m(D)$ are equal to one another. $V_m(D, L)$ first decreases then increases with the gas pressure.

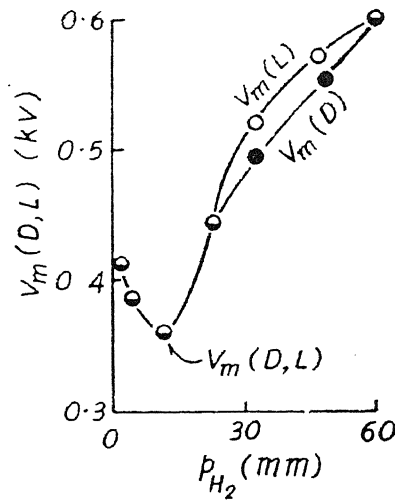
पारद-वाष्प-संदूषित आर्गान में देहली-विभव के अध्ययन[1] से पता चला है कि किरणन के दौरान $V_m(L)$ अंधकार में $V_m(D)$ से अधिक होता है। अतः पारद-वाष्प-संदूषित हाइड्रोजन में इसका अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

लेखक के पूर्व-प्रकाशित लेखों [1-3] के समान प्रस्तुत अध्ययन सोडा-कांच के ओज़ोनित्र में सम्पन्न

किया गया है। विभिन्न दाबों पर शुष्क हाइड्रोजन को 30 सें० पर द्रव पारे के सम्पर्क में रखा गया। ओज़ोनित्र से 25 सेमी० पर स्थित 200 वाट, 200 वोल्ट वाला एक तापदीप्त (काँच) लैम्प किरणन स्रोत के रूप में प्रयुक्त किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

किरणन के कारण V_m में हुई वृद्धि (चित्र 1) ऋणात्मक जोशी प्रभाव $-\Delta i$ की उपस्थिति के कारण हो सकती है।[1] हाइड्रोजन के $\tilde{p}-V_m$ वक्र में प्राप्त निम्निष्ठ उल्लेखनीय है। अत्यन्त क्षीण दाब की हाइड्रोजन में अणुओं की संख्या इतनी कम होती है कि टकराने वाले इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जा बहुत अधिक होने पर ही अभीष्ट द्वितीयक इलेक्ट्रानों की उत्पत्ति संभव है अर्थात् उच्च विभव आरोपित किया जाना चाहिए। दूसरी ओर, यदि गैस का दाब बहुत अधिक है तो औसत मुक्त पथ का मान बहुत कम होता है। फलतः पड़ोसी अणुओं के संघट्टन के कारण निष्क्रियण होने से, इलेक्ट्रॉन या आयनी संघट्टन के

चित्र 1

द्वारा अणुओं के आयनीकरण की प्रायिकता बढ़ जाती है। आयनीकरण की अवस्था में आने के लिए, प्रति औसत मुक्त पथ की ऊर्जा के उस गैस के निश्चित निम्नतम परिणाम अर्थात् आयनन विभव से तनिक अधिक होना चाहिए। अतः उच्चतर विभव की आवश्यकता होती है। दाब की इन दो पराकाष्ठाओं के बीच में कहीं पर एक ऐसा दाब होना चाहिए जिस पर स्फुलिंग-वोल्टता या देहली-विभव V_m का मान न्यूनतम होगा। प्रस्तुत प्रयोग की दशाओं में इस स्थिति का अवलोकन लगभग $p_{H_2}=10$ मिमी० (30° सें०) पर हुआ है।

निर्देश

1. प्रसाद, जगदीश, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 303
2. वही 1972, **15**, 79
3. प्रसाद, जे०, **रव्यु रुमेन डि किमि**, 1973, **18**, 1865

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April 1977, Pages, 113-122

वृत्ताकार झिल्ली के दोलन में दो चरों वाले सार्वीकृत फलनों का सम्प्रयोग

वाई० एन० प्रसाद तथा ए० सिद्दीकी
सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी,
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मार्च 9, 1976]

सारांश

एक वृत्ताकर झिल्ली के अनुप्रस्थ दोलनों के लिये स्नेडान द्वारा दिये गये सामान्य अवकल समीकरण को सरल करने के हेतु हमने मित्तल तथा गुप्ता द्वारा परिभाषित दो चरों वाले H-फलन का उपयोग किया है। प्राप्त हल सामान्य प्रकृति के हैं। कतिपय विशिष्ट दशाओं की भी विवेचना की गई है।

Abstract

Application of generalized functions of variables in vibrations of a circular membrane. *By* Y. N. Prasad and A. Sddiqui, Applied Mathematics section, Institute of Technology, B. H. U., Varanasi.

We have taken H-function of two variables defined by Mittal and Gupta [3] in solving the general differential equation by Sneddon [6] governing the transverse vibrations of a circular membrane. The solutions obtained by us are of general character. A few particular cases have also been discussed. The motivation of this paper came from a paper due to Singh [7].

1. प्रस्तावना

हम a त्रिज्या वाली वृत्ताकार पतली झिल्ली के संमितीय दोलन पर विचार करेंगे। स्नेडान[6] ने गति सम्बन्धी जो समीकरण दिया है वह है

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-\frac{p(r, t)}{T} \tag{1·1}$$

जहाँ z झिल्ली के बिन्दु (r, θ) का z तल से अनुदैर्ध्य विस्थापन है, T तनाव, $c^2=T/\sigma$, σ एकसमान पृष्ठ घनत्व, t, समय $p(r, t)$ बाह्य बल है जो झिल्ली के प्रति इकाई क्षेत्र पर कार्यशील है। हम समीकरण (1·1) को सीमा प्रतिबन्ध के साथ

$$\text{(i)}\quad z=0 \text{ जब } r=a, \text{ समस्त } t \text{ के लिये} \tag{1·2}$$

$$\text{(ii)}\quad z=f(r) \text{ तथा } \frac{\partial z}{\partial t}=g(r) \text{ जब } t=0 \tag{1·3}$$

अर्थात् झिल्ली को स्थिति $z=f(r)$ से $\frac{\partial z}{\partial z}=g(r)$ वेग से गति करने दिया जाता है।

$$\text{हम यह भी कल्पित करेंगे कि } p(r, t)=F(r)\ G(t) \tag{1·4}$$

जहाँ $F(r)$ केवल r का फलन है और $G(t)$ केवल t का। हम समीकरण (1·1) को सिद्ध करने के लिये $f(r)$, $F(r)$, $g(r)$, $G(t)$ को दो चरों वाले सार्वीकृत फलनों अथवा मित्तल तथा गुप्ता[3] द्वारा परिभाषित H-फलन के रूप में मानेंगे। चूँकि दो चरों वाले H-फलन को फाक्स की[2] परिभाषा के अनुसार एक चर वाले H-फलन में अत: अनेक उच्चतर अबीजीय फलनों तथा बहुपदों में परिवर्तित किया जा सकता है, इसलिये हमारे द्वारा प्रदत्त फल सामान्य प्रकृति के हैं। मुख्य फलों से कुछ विशिष्ट दशायें भी प्राप्त की गई हैं।

हम अपने फलों के लिये राम[5] द्वारा प्राप्त दो चरों के H-फलन वाले निम्नांकित समाकलों का उपयोग करेंगे

$$\int_0^y x^{\rho-1} (y-x)^{\mu-1}\, H^{m+1,\, n}_{p,\, q+1}\left[ax^{\sigma} (y-x)^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix}\{(a'_p, a'_p)\} \\ (b_o, \beta_o), \{(b_q', \beta_q')\}\end{matrix}\right]$$

$$H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, n_1 \\ p_1, q_1\end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix}m_2, n_2 \\ p_2, q_2\end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix}m_3, n_3 \\ p_3, q_3\end{pmatrix}\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\{(a_{p_1}, a_{p_1}, A_{p_1})\} \\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix} \middle| bx^h(y-x)^{h_1}, cx^k(y-x)^{k_1}\right] dx$$

$$=\frac{y^{\rho+\mu-1}}{\beta_o}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b'_j-\beta'_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a'_j+\alpha'_j\rho_r)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b'_j+\beta'_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a'_j-\alpha'_j\rho_r)}\, a^{\rho r} y^{(\sigma+\sigma_1)\rho r}$$

$$H\left[\begin{array}{l|l|l} \begin{pmatrix}0, n_1+2\\ p_1+2, q_1+1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}(1-\rho-\sigma\rho_r, h, k), (1-\mu-\sigma_1\rho_r, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}\\ (1-\rho-\mu-(\sigma+\sigma_1)\rho_r, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\end{array} & \\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2, q_2\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}\end{array} & \begin{array}{l} by^{h+h_1}\\ cy^{k+k_1}\end{array}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3}, E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{array} & \end{array}\right] \tag{1·5}$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{b_0+r}{\beta_0}$, $\beta_0>0$, $\beta<R(b_0/\beta_0)<\delta$, $|\arg a|<\frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$, $A>0$, $\sigma, \sigma_1, h, h_1, k, k_1\geqslant 0$,

$R(\rho+\sigma\dfrac{b_0}{\beta_0}+h\alpha'+k\beta')>0$, $R(\mu+\sigma_1\dfrac{b_0}{\beta_0}+h_1\alpha'+k_1\beta')>0$,

जहाँ

$$\delta=\min R(b'_h/\beta'_h),\ h=1, \ldots, m \tag{1·6}$$

$$\beta=\max R\left(\frac{a_i'-1}{\alpha_i}\right),\ i=1, \ldots, n \tag{1·7}$$

$$\lambda=\sum_1^m \beta'_j-\sum_{m+1}^q \beta'_j+\sum_1^n \alpha'_j-\sum_{n+1}^p \alpha'_j, \tag{1·8}$$

$$A=\sum_1^q \beta'_j-\sum_1^p \alpha'_j \tag{1·9}$$

$$\alpha'=\min R(d_h/\delta_h),\ \ h=1, \ldots, m_2 \tag{1·10}$$

$$\beta'=\min R(f_h/F_h),\ h=1, \ldots, m_3 \tag{1·11}$$

$$\sum_1^{p1} \alpha_j+\sum_1^{p2} \gamma_j<\sum_1^{q1} \beta_j+\sum_1^{q2} \delta_j \tag{1·12}$$

$$\sum_1^{p1} A_j+\sum_1^{p3} E_j<\sum_1^{q1} B_j+\sum_1^{q3} F_j \tag{1·13}$$

$$u=\sum_1^{n1} \alpha_j-\sum_{n_1+1}^{p1} \alpha_j-\sum_1^{q1}\beta_j+\sum_1^{m2}\delta_j-\sum_{m_2+1}^{q_2}\delta_j+\sum_1^{n2}\gamma_j-\sum_{n_2+1}^{p2}\gamma_j>0 \tag{1·14}$$

$$|\arg b|<\tfrac{1}{2}u\pi \tag{1·15}$$

$$v=\sum_1^{n1} A_j-\sum_{n_1+1}^{p1} A_j-\sum_1^{q1} B_j+\sum_1^{m3} F_j-\sum_{n_3+1}^{q3} F_j+\sum_1^{n3} E_j-\sum_{n_3+1}^{p3} E_j>0 \tag{1·16}$$

$$|\arg c|\tfrac{1}{2}v\pi \tag{1·17}$$

इस फल की उपपत्ति

$$H_{p,\,q+1}^{m+1,\,n}\left[ax^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\(b_o,\,\beta_o),\,\{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{\sum_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\,\rho_r)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_r)}\,a^{\rho_r}x^{\sigma\rho_r} \tag{1·18}$$

के श्रेणी प्रसार से प्राप्त होती है बशर्ते कि $\rho_r=\frac{b_0+r}{\beta_0}$, $\beta_0>0$, $\beta<R(b_0/\beta_0)<\delta$, $|\arg a|<\frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$, $A>0$, जो मुखर्जी तथा प्रसाद[4] द्वारा प्राप्त हैं तथा H-फलन की परिभाषा कंटूर समाकल के रूप में हो।

(1·5) में $m=n=p=0$, $q=1$, $\sigma=2$, $\sigma_1=0$, $a=\frac{1}{4}w_i^2$, $b_0=0=b_1$, $\beta_0=1=\beta_1$ रखने पर

$$\int_0^y x^{\rho-1}(y-x)^{\mu-1}J_0(w_ix)\,H\{bx^h(y-x)^{h_1},\,cx^k(y-x)^{k_1}\}\,dx$$

$$=y^{\rho+\mu-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(\tfrac{1}{4}w_i^2\right)^r y^{2r}$$

$$H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0,\,n_1+2\\p_1+2,\,q_1+1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2,\,n_2\\p_2,\,q_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3,\,n_3\\p_3,\,q_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1-\rho-2r,\,h,\,k),\,(1-\mu,\,h_1,\,k_1),\,\{(a_{p_1},\,\alpha_{p_1},\,A_{p_1})\}\\(1-\rho-\mu-2r,\,h+h_1,\,k+k_1),\,\{(b_{q_1},\,\beta_{q_1},\,B_{q_1})\}\\ \{(c_{p_2},\,\gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2},\,\delta_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3},\,E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3},\,F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}by^{h+h_1}\\cy^{k+k_1}\end{matrix}\right], \tag{1·19}$$

बशर्ते कि $R(\rho+h\alpha'+k\beta')>0$, $R(\mu+h_1\alpha'+k_1\beta')>0$ और (1·10) से लेकर (1·17) तक के प्रतिबन्ध तुष्ट हों जहाँ कि $H\{bx^h(y-x)^{h_1},\,c_x{}^k(y-x)^{k_1}\}$ से (1·5) के बाम पक्ष में आये दो चरों वाले H-फलन का बोध होता है।

(1·5) में $m=n=p=q=0=\sigma_1=b_1$, $\sigma=\beta_0=1$ रखने पर और (1·5) के प्रसारित रूप में $a\to 0$ मानने पर

$$\int_0^y x^{\rho-1}(y-x)^{\mu-1}H\{bx^h(y-x)^{h_1},\,cx^k(y-x)^{k_1}\}\,dx$$

$$=y^{\rho+\mu-1}\, H\left[\begin{array}{c|l|l} \binom{0,\, n_1+2}{p_1+2,\, q_1+1} & \begin{array}{l}(1-\rho,\, h,\, k),\, (1-\mu,\, h_1,\, k_1),\, \{(a_{p_1},\, \alpha_{p_1},\, A_{p_1})\}\\ (1-\rho-\mu,\, h+h_1,\, k+k_1),\, \{(b_{q_1},\, \beta_{q_1},\, B_{q_1})\}\end{array} & \\ \binom{m_2,\, n_2}{p_2,\, q_2} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2},\, \gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2},\, \delta_{q_2})\}\end{array} & \begin{array}{l} by^{h+h_1}\\ cy^{k+k_1}\end{array}\\ \binom{m_3,\, n_3}{p_3,\, q_3} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3},\, E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3},\, F_{q_3})\}\end{array} & \end{array}\right]$$

बशर्ते कि (1·19) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट हों।

सान्त हैंकेल परिवर्त

समीकरण (1·1) में $r\, J_0(\xi_i\, r)$ से गुणा करने, r के प्रति 0 से y तक समाकलित करने और सीमा प्रतिबन्ध $z=0$ जब $r=y$ का उपयोग करने पर शून्य कोटि का सान्त हैंकेल परिवर्त[6] प्राप्त होगा

$$\bar{z}_j=\int_0^y r\, z(r,\, t)\, J_0(\xi_i\, r)\, dr \tag{1·20}$$

जो सामान्य अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+c^2\xi_i^{\,2}\right)\bar{z}_j=\frac{1}{\sigma}\,\bar{p}_j(\xi_j,\, t) \tag{1·21}$$

की तुष्टि करता हैं जहाँ ξ_i समीकरणों

$$J_0(\xi_i y)=0, \tag{1·22}$$

का मूल है, $\bar{p}_j(\xi_i,\, t)$ समीकरण (1·20) द्वारा परिभाषित $p(r,\, t)$ का सान्त हैंकेल परिवर्त है।

2. निर्मेय का हल

$f(r)$, $g(r)$, $F(r)$, $G(t)$, को दो चरों वाले H-फलन के द्वारा निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं:

$$f(r)=r^{\rho-2}(y-r)^{\mu-1}\, H\left[\begin{array}{c|l|l} \binom{0,\, n_1}{p_1,\, q_1} & \begin{array}{l}\{(a_{p_1},\, \alpha_{p_1},\, A_{p_1})\}\\ \{(b_{q_1},\, \beta_{q_1},\, B_{q_1})\}\end{array} & \\ \binom{m_2,\, n_2}{p_2,\, n_2} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2},\, \gamma_{p_2})\}\\ \{(b_{q_2},\, \delta_{q_2})\}\end{array} & br^h(y-r)^{h_1},\; cr^k(y-r)^{k_1}\\ \binom{m_3,\, q_3}{p_3,\, q_3} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3},\, E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3},\, F_{q_3})\}\end{array} & \end{array}\right] \tag{2·1}$$

$$g(r)=r^{\,\prime-2}(y-r)^{\mu'-1}\,H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1'}{p_1',\ q_1'}\\ \binom{m_2',\ n_2'}{p_2',\ q_2'}\\ \binom{m_3',\ n_3'}{p_3',\ q_3'}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a'_{p'_1},\ \alpha'_{p'_1},\ A'_{p'_1})\}\\ \{\{b'_{q'_1},\ \beta'_{q'_1},\ B'_{q'_1})\}\\ \{(c'_{\ 2},\ \gamma_{p'_2})\}\\ \{(d'_{p'_2},\ \delta'_{q'_2})\}\\ \{(e'_{p'_3},\ E'_{p'_3})\}\\ \{(f'_{q'_3},\ F'_{q'_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix} b'(r^{h'}(y-r)^{h'_1},\\ c'r^{k'}(y-r)^{k'_1}\end{matrix}\right] \tag{2·2}$$

इसी प्रकार $F(r)$ को (2·2) में दो डैशों से युक्त तथा $G(t)$ को तीन डैशों से युक्त परिभाषित करते हैं, r के स्थान पर y तथा y के स्थान पर t रखते हैं।

(1·19) से

$$\bar{p}_j(\xi_i,\ t)=G(t)y^{\rho+\mu-1}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{N!}\left(\tfrac{1}{2}w_i y\right)^{2N}$$

$$H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1+2}{p_1+2,\ q_1+1}\\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2}\\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1-\rho-2N,\ h,\ k),\ (1-\mu,\ h_1,\ k_1),\ \{(a_{p_1},\ \alpha_{p_1},\ A_{p_1})\}\\ (1-\rho-\mu-2N,\ h+h_1,\ k+k_1),\ \{(b_{q_1},\ \beta_{q_1},\ B_{q_1})\}\\ \{(c_{p_2},\ \gamma_{q_2})\}\\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3},\ E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3},\ F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix} by^{h+h_1},\\ cy^{k+k_1}\end{matrix}\right] \tag{2·3}$$

जहाँ (1·19) में दिये गये प्रतिबन्ध दो डैशों के लिये तुष्ट होते हैं। स्पष्ट है कि $\bar{p}_j(\xi_i,\ t)=0$ यदि $t=0$

प्रतिबन्ध (1·3) से (1·21) का पूरक फलन[6] होगा:

$$\bar{z}_j=\cos(c\ \xi_i\ t)\int_0^y rf(r)\ J_0(\xi_i\ r)\ dr+\frac{\sin\ (c\ \xi_i\ t)}{c\ \xi_i}\int_0^y r\ g(r)\ J_0(\xi_i\ r)\ dr \tag{2·4}$$

स्नेडान[6] के अनुसार प्रतिलोमन करने पर (1·1) का हल

$$z=\frac{2}{y^2}\sum_i\frac{J_0(\xi_i\ r)}{[J_1(\xi_i\ y)]^2}\cos(c\ \xi_i\ t)\int_0^y r\ f(r)\ J_0(\xi_i\ r)\ dr+\frac{2}{cy^2}\sum_i\frac{J_0(\xi_i\ r)}{[J_1(\xi_i\ y)]^2}$$

$$\frac{\sin(c\xi_i r)}{\xi_i}\int_0^y r\ g(r)\ J_0(\xi_i\ r)\ dr\frac{2y^{\rho+\mu-3}}{c\ \sigma_1\ \xi_i}\sum_1\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{(N!)^2}\left(\tfrac{1}{2}w_i y\right)^{2N}$$

$$\frac{J_0(\xi_i r)}{[J_1(\xi_i y)]^2} H \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0, n_1+2 \\ p_1+2, q_1+1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2, q_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3, q_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (1-\rho-2N, h, k), (1-\mu, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (1-\rho-\mu-2N, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(p_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\} \end{matrix} \right| \begin{matrix} by^{h+h_1}, \\ cy^{k+k_1} \end{matrix} \right]$$

$$\times \int_0^t G(u) \sin \{c\, \xi_i (t-u)\}\, du \qquad (2\cdot5)$$

के रूप में प्राप्त होगा जहाँ समीकरण (1·22) के समस्त धन मूलों का योग लिया जाता है। (2·5) में समाकलों के मानों को (1·19) तथा (1·19A) से रखने पर हमें (1·1) का हल निम्न रूप में प्राप्त होता है

$$z(r, t) = 2y^{\rho+\mu-3} \sum_i \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N!)^2} \frac{J_0(\xi_i r)}{[J_1(\xi_i y)]^2} (\tfrac{1}{2}\xi_i y)^{2N} \cos (c\, \xi_i t)$$

$$H \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0, n_1+2 \\ p_1+2, q_1+1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2, q_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3, q_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (1-\rho-2N, h+k,), (1-\mu, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (1-\rho-\mu-2N, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\} \end{matrix} \right| \begin{matrix} by^{h+h_1}, \\ cy^{k+k_1} \end{matrix} \right]$$

$$+ \frac{2y^{\rho'+\mu'-3}}{c\,\xi_i} \sum_i \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N!)^2} \frac{J_0(\xi_i r)}{[J_1(\xi_i)]^2} (\tfrac{1}{2}\xi_i y)^{2N} \sin (c\, \xi_i t)$$

$$H \left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0, n'_1+2 \\ p'_1+2, q'_1+1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m'_2, n'_2 \\ p'_2, q'_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m'_3, n'_3 \\ p'_3, q'_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (1-\rho'-2N, h', k'), (1-\mu', h'_1, k'_1), \{(a'_{p'_1}, \alpha'_{p'_1}, A'_{p'_1})\} \\ (1-\rho'-\mu'-2N, h'+h'_1, k'+k'_1), \{(b'_{q'_1}, \beta_{q'_1}, B'_{q'_1})\} \\ \{(c'_{p'_2}, \gamma_{p'_2})\} \\ \{(d'_{q'_2}, \delta_{q'_2})\} \\ \{(e'_{p'_3}, E'_{p'_3})\} \\ \{(f'_{q'_3}, F'_{q'_3})\} \end{matrix} \right| \begin{matrix} by'^{h'+h'}, \\ cy'^{k'+k'_1} \end{matrix} \right]$$

$$+ \frac{2y^{\rho''+\mu''-3\rho'''+\mu'''-3}}{\sigma_1} \sum_i \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{N'=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+N'-1}}{(N!)^2(2N'-1)!} (\tfrac{1}{2}\xi_i y)^{2N} (c\,\xi_i)^{2N'-2} \frac{J_0(\xi_i r)}{[J_1(\xi_i y)]^2} t^{2N'}$$

$$H\begin{bmatrix}\binom{0,\ n_1''+2}{p_1''+2,\ q''+1}\\ \binom{m_2'',\ n_2''}{p_2'',\ q_2''}\\ \binom{m_3'',\ n_3''}{p_3'',\ q_3''}\end{bmatrix}$$

$$\times\left[\begin{array}{l|l}(1-\rho''-2N,h'',k''),(1-\mu'',h_1'',k_1''),\{(a''_{p_1''},\alpha''_{p_1''},A''_{p_1''})\} & \\ (1-\rho''-\mu''-2N,\ h''+h_1'',\ k''+k_1''),\{(b''_{q_1''},\beta''_{q_1''},B''_{q_1''})\} & b''y^{h''+h''_1}\\ \{(c''_{p_2''},\gamma''_{p_2''})\} & c''y^{k''+k''_1}\\ \{(d''_{q''_2},\delta''_{q''_2})\} & \\ \{(e''_{p''_3},E''_{p''_3})\} & \\ \{(f''_{q''_3},F''_{q''_3})\} & \end{array}\right]$$

$$H\begin{bmatrix}\binom{0,\ n_1'''+2}{p_1'''+2,\ q_1'''+1}\\ \binom{m_2''',\ n_2'''}{p_2''',\ q_3'''}\\ \binom{m_3''',\ n_3'''}{p_3'''\ \ q_3'''}\end{bmatrix}$$

$$\times\left[\begin{array}{l|l}(2-\rho''',h''',k'''),(2-\mu'''-2N',h_1''',k_1'''),\{(a'''_{p_1'''},\alpha'''_{p_1'''},A'''_{p_1'''})\} & \\ (3-\rho'''-\mu'''-2N',\ h'''+h_1''',\ k'''+k_1'''),\{(b'''_{q_1'''},\beta'''_{q_1'''},B'''_{q_1'''})\} & b'''t^{h'''+h'''_1}\\ \{(c'''_{p_2'''},\gamma'''_{p_2'''})\} & c'''t^{k'''+k'''_1}\\ \{(d'''_{q_2'''},\delta'''_{q_2'''})\} & \\ \{(e'''_{q_3'''},E'''_{q_3'''})\} & \\ \{(f'''_{q_3'''},F'''_{q_3'''})\} & \end{array}\right]$$

(2·6)

बशर्ते कि (1·19) में व्यक्त प्रतिबन्ध, एक, दो तथा तीन डैशों के साथ तुष्ट हों।

3. विशिष्ट दशायें

(i) जब झिल्ली सन्तुलन अवस्था में $t=0$ पर विराम अवस्था में होती है अर्थात् $f(r)=0$ ताथ $g(r)=0$ ($t=0$ पर) तो (1·1) का हल

$$z(r,\ t)=\frac{2y^{\rho''+\mu''-3}\,t^{\rho'''+\mu'''-3}}{\sigma_1}\sum_i\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{N'=1}^{\infty}\frac{(-1)^{N+N'-1}}{(N!)^2\,2N'-1!}\,(\tfrac{1}{2}\xi_i\,y)^{2N}\,(c\xi_i)^{2N'-2}$$

$$\frac{J_0(\xi_i r)\,t^{2N'}}{[J_1(\xi_i y)]^2}\,H_1\{b''y^{h''+h''_1},\ c''y^{k''+k''_1}\}\,H_2\{b'''t^{h'''+h'''_1},\ c'''t^{k'''+k'''_1}\},\qquad(3\cdot1)$$

होगा बशर्ते कि (1·10) से (1·17) तक के प्रतिबन्ध दो तथा तीन डैशों के लिये तुष्ट हों और संकलन (1·22) के समस्त धन मूलों का किया गया हो तथा

$$H_1\{b''y^{h''+h''_1},\ c''y^{k''+k''_1}\}\ \text{तथा}\ H_2\{b'''t^{h'''+h'''_1},\ c'''t^{k'''+k'''_1}\}$$

(2·6) में दो चरों वाले अन्तिम दो H-फलनों के लिये आया है।

(ii) (3·1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अतिरिक्त, यदि

$\rho''=\rho'''=2,\ \mu''=\mu'''=1,\ p_1''=q_1''=0=p_1'''=q_1'''=h_1''=k_1''=h_1'''=k_1'''=n_2''=n_3''$ $=p_2''=p_3''=n_2'''=n_3'''=p_2'''=p_3'''=d_1''=f_1''=d_1'''=f_1'''=k_1''=k_1''',\ h''=h'''=1$ $=m_2''=m_3''=q''=q_3''=\delta_1''=F_1''=\delta'''=F_1'''$ तथा b'', c'', b''', c''' सभी शून्य की ओर अग्रसर हों अतः $F(r)$ तथा $G(t)$ दोनों 1 की ओर अग्रसर होते हैं, फलस्वरूप एर्डेल्यी[1] के अनुसार हल (3·1)

$$z(r,\ t)=\frac{2}{\sigma!}\sum_i\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{N'=1}^{\infty}\frac{(-1)^{N+N'-1}}{(N!)^2\,2N'-1!}\,(\tfrac{1}{2}\xi_i y)^{2N}\,(c\xi i)^{2N'-2}$$

$$\frac{J_0(\xi_i)}{[J_1(\xi_i y)]^2}\,\frac{1}{2N+2}\,\frac{t^{2N'}}{2N'}$$

$$=\frac{2}{\sigma_1}\sum_i\frac{J_0(\xi_i r)}{[J_1(\xi_i y)]^2}\left\{\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{(N!)^2}\,(\tfrac{1}{2}\xi_i y)^{2N}\,\frac{1}{(2N+2)}\right\}\sum_{N'=1}^{\infty}\frac{(-1)^{N'+1}}{2N'-1!\,(2N')}$$

$$\times(c\xi_i)^{2N'-2}\,t^{2N'}$$

$$=\frac{2}{c^2\sigma_1 y}\sum_i\frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^2 J_1(\xi_i y)}\,\{1-\cos\,(c\xi_i t)\},\qquad(3\cdot2)$$

में समानीत हो जाता है जहाँ σ_1 क्षेत्रीय घनत्व है, y वृत्ताकार झिल्ली की त्रिज्या है तथा संकलन समीकरण (1·22) के समस्त धन मूलों का विस्तीर्ण है जो स्नेडान का ज्ञात फल है। (3·2) से यह स्पष्ट हैं कि $t=0$ पर विस्थापन z शून्य हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcedental Functions, **भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क** 1961, **पृष्ठ** 215
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजे०अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
3. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस**, 1973, **75A**, 117
4. मुखर्जी, एस० एन०, तथा प्रसाद, वाई० एन०, The Mathematics Educa tion, 1971,, **5(1)**, 6-12
5. राम, एस० डी०, **पी० एच-डी० थीसिस, बनारस** हिन्दू **विश्वविद्यालय**, 1974
6. स्नेडान, आई० एन०, Fourier transforms, **मैकग्राहिल**, 1951 **पृष्ठ** 125 (eqn. 96), 93 Theor. 30) 129, 131
7. सिंह, एफ०, Def. Sci. Jour. 1972, **22**, 215-220

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April 1977, Pages 123-133

धातु-अर्धचालक प्रकार के स्पर्शों में वाहक जीवन काल पर दाब का प्रभाव

विपिन कुमार, सीताराम तथा राम परशाद

राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला, नई दिल्ली

[प्राप्त—जून 25, 1976]

सारांश

दाब का प्रभाव वाहक जीवन काल पर, जो धातु से अर्धचालक में नति लगाने पर अंतः क्षेपित होते हैं, ज्ञात किया गया है। सामान्य प्रचलन के विपरीत यहाँ अग्रिम तथा विपरीत, दोनों नतियों का प्रयोग किया गया है। यह पाया गया है कि दाब बढ़ने पर वाहक जीवनकाल कम हो जाता है। इस तथ्य का प्रयोग दाब द्वारा धातु-अर्धचालक स्पर्शों में ओह्मिक स्पर्श बनने की व्याख्या के लिये किया गया है। वाहक जीवनकाल पर चुम्बकीय क्षेत्र का प्रभाव नगण्य पाया गया है।

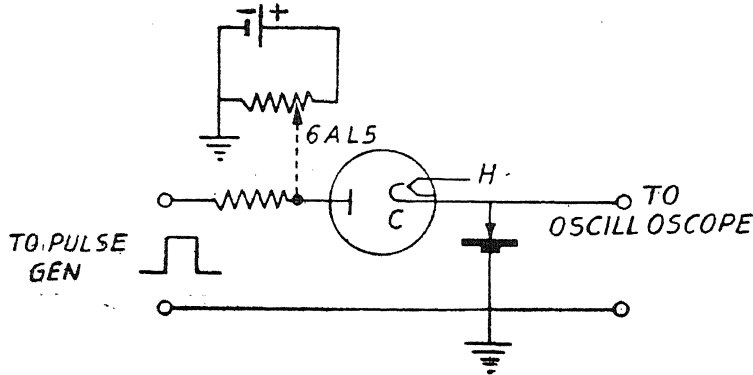
Abstract

Effect of pressure on carrier lifetime in metal-semiconductor-like contacts. *By* Vipin Kumar, Sita Ram and Ram Parshad, National Physical Laboratory, New Delhi.

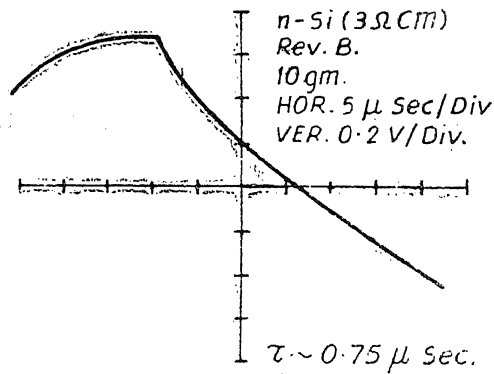
Effect of pressure on the carrier lifetime, which are injected from metal to semiconductor on applying bias, has been studied. As against conventional practice, both forward and reverse biases have been applied. It is found that the carrier lifetime decreases with pressure. This fact has been utilized to explain the formation of ohmic contacts by applying pressure at the metal semiconductor contacts. Effect of magnetic field on carrier lifetime has been found negligible.

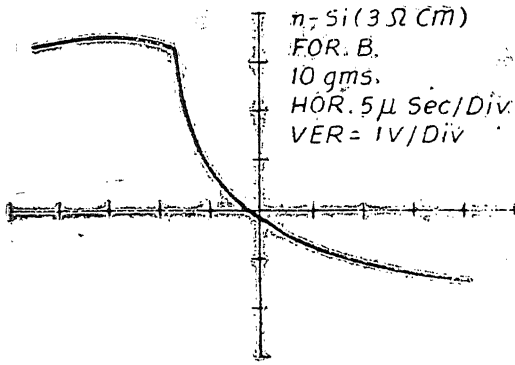
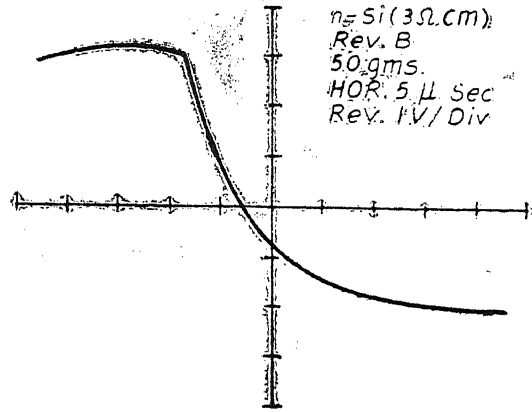
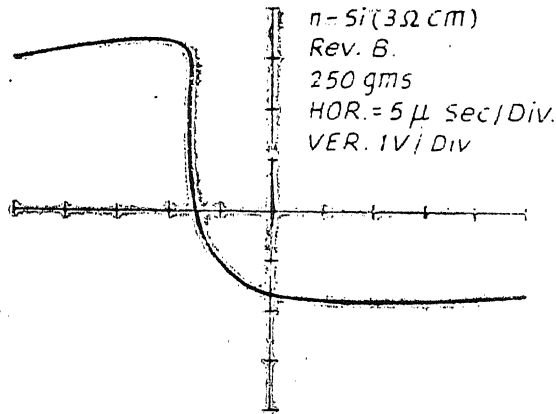
पूर्व प्रपत्रों [1, 2] में यांत्रिक धातु-अर्धचालक स्पर्शों के ओह्मिक गुण पर दाब का प्रभाव प्रतिवेदन किया गया था। प्रस्तुत प्रपत्र में ऐसे स्पर्शों के ओह्मिक गुणों को और अधिक स्पष्ट करने के लिये दाब का प्रभाव उन वाहकों पर ज्ञात किया गया है जो धातु से अर्धचालक में अंतःक्षेपण द्वारा प्रवेश करते हैं [3]। इसके लिये बहु-प्रचलित लैडर हैंडलर-जियाकोलेट्टो विधि [4] का प्रयोग किया गया है। लेकिन

उपर्युक्त विधि में जहाँ पी-एन संधि के लिये केवल अग्रिम नति का प्रयोग किया गया है, प्रस्तुत पत्र में यांत्रिक धातु-अर्धचालक स्पर्शों के लिए अग्रिम तथा विपरीत, दोनों नतियों का प्रयोग किया गया है। अन्य लेखकों [5, 6] द्वारा जरमेनियम पी-एन संधियों में अल्पसंख्या वाहक जीवनकाल पर दाब का प्रभाव अध्ययन किया गया है।

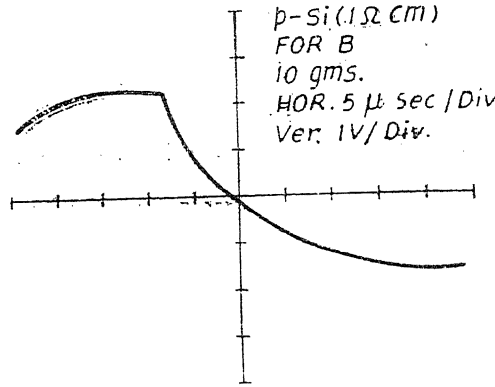
जिन अर्धचालकों का प्रयोग यहाँ किया गया है, वे हैं सिलिकन, जरमेनियम तथा गैलियम आर्सेनाइड। प्रयुक्त धातु-अर्धचालक स्पर्श बनाने की विधि पूर्व प्रपत्र [1] में दी जा चुकी है। स्पर्शों द्वारा

चित्र 1 : लैडर हैंडलर-जियाकोलेट्टो विधि द्वारा वाहक जीवनकाल मापने के लिये सरल परिपथ

काफी धारा प्रवाहित हो सके, इसके लिए लघु प्रतिरोधिता वाले अर्धचालकों का प्रयोग किया गया। प्रयोग किये गये परिपथ की रूपरेखा चित्र 1 में दिखायी गयी है।

सिलिकन :—चित्र 2 में एन-सिलिकन (प्रतिरोधिता 3 Ω से० मी०) वाले स्पर्श

चित्र 2 : एन-सिलिकन (प्रतिरोधिता 3Ω से० मी०) स्पर्श के लिये अग्रिम नति में 10 ग्राम दाब पर क्षणिक क्षय

द्वारा अग्रिम नति में जनित क्षणिक क्षय 10 ग्राम दाब पर दिखाया गया है। अग्रिम नति का अर्थ यहाँ है कि धातु, अर्धचालक के सापेक्ष धनात्मक विभव पर है। चित्र 3 (अ, ब, स) में इसी

चित्र 3 (अ, ब, स) : एन-सिलिकन (प्रतिरोधिता 3Ω से० मी०) स्पर्श के लिये विपरीत नति में क्रमशः 10, 50 तथा 250 ग्राम दाबों पर क्षणिक क्षय

स्पर्श के लिये विपरीत नति में क्रमशः 10 ग्राम, 50 ग्राम तथा 250 ग्राम दाबों पर क्षणिक क्षय दिखाये गये हैं। चित्र 4 में अग्रिम नति में 10 ग्राम दाब पर तथा चित्र 5 (अ, ब, स) में विपरीत नति में क्रमशः 10 ग्राम, 100 ग्राम तथा 350 ग्राम दाबों पर पी-प्रकार सिलिकन (प्रतिरोधिता 1Ω से० मी०) वाले स्पर्शों के लिये क्षणिक क्षय दिखाये गये हैं। बहुत कम दाब पर क्षणिक क्षयों के अतिरिक्त अन्य सभी

दाबों पर क्षणिक क्षय की वक्रता बहुत अधिक है, जबकि आदर्श क्षय रैखिक होने चाहिए। उपर्युक्त चित्रों में दिखाये गये क्षणिकों में लघुदाब क्षणिकों के अतिरिक्त अन्य क्षणिकों में जीवनकाल की गणना वोल्टता—समय प्रवणता $\left(\tau=\frac{kT}{e}\frac{\triangle t}{\triangle v}\right)$ से करना कठिन हो जाता है।

चित्र 4 : पी-सिलिकन (प्रतिरोधिता 1Ω से० मी०) स्पर्श के लिये अग्रिम नति में 10 ग्राम दाब पर क्षणिक क्षय

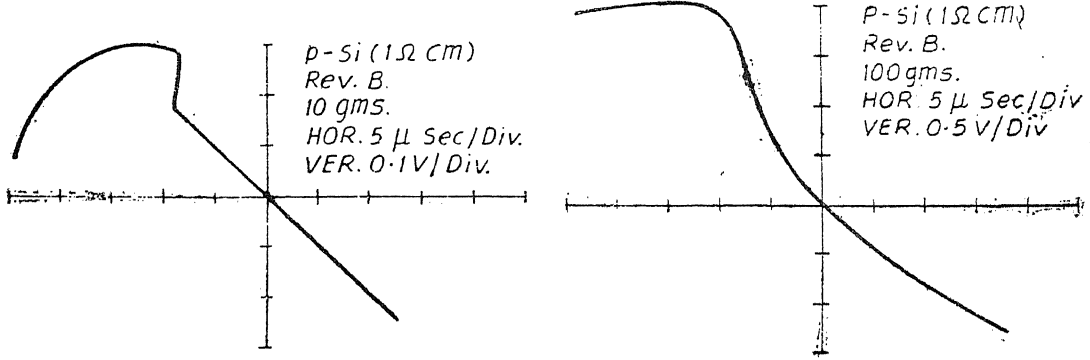
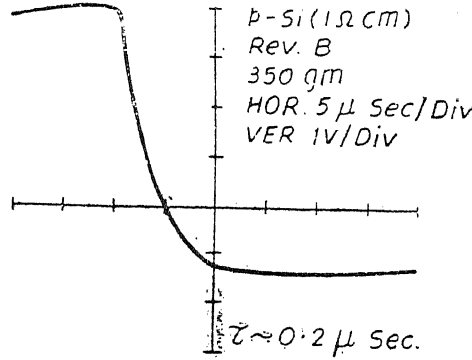
यह देखा गया है कि एन तथा पी-सिलिकन वाले स्पर्शों के लिये अग्रिम नति में क्षणिक की आकृति केवल 10 ग्राम से कम दाब के लिये ही परिवर्तित होती है (जबकि स्पर्श त्रिज्या लगभग 100 माइक्रान है)। इससे अधिक दाब के लिये क्षणिक की आकृति स्थिर रहती है।

विपरीत नति में भी क्षणिक की आकृति दाब के साथ बदलती है। एक क्रांतिक दाब पर क्षणिक समाप्त हो जाता है जिसका चिरप्रतिष्ठित अर्थ होगा कि अंतःक्षेपित वाहक का जीवनकाल लगभग शून्य हो गया है। लेकिन जहाँ 1Ω से०मी० पी-सिलिकन वाले स्पर्श के लिये क्रांतिक दाब लगभग 350 ग्राम था, वहीं 3Ω से० मी० एन-सिलिकन वाले स्पर्श के लिये यह केवल 250 ग्राम था।

एक अन्य प्रयोग में 2.3Ω से०मी० प्रतिरोधिता के एन-प्रकार बहुक्रिस्टलीय सिलिकन वाले स्पर्श का प्रयोग किया गया जिसका चिकना पृष्ठ बेलनाकार आकृति का था क्रिस्टल वर्धन करते समय बनता है। ऐसे पृष्ठ के लिये अग्रिम नति में वाहक जीवन काल पर दाब का प्रभाव नगण्य था जबकि विपरीत नति में दाब का प्रभाव अन्य स्पर्शों की तरह था।

गैलियम आर्सेनाइड (गै० आ०)

विद्युत स्पर्श बनाने के लिये गैलियम आर्सेनाइड की लैप्ड पृष्ठों का प्रयोग किया गया। एन-प्रकार गैलियम आर्सेनाइड की प्रतिरोधिता लगभग 0.1Ω से० मी० थी जबकि पी-प्रकार की प्रतिरोधिता नहीं मापी गयी है। अग्रिम नति में पी-तथा एन-प्रकार वाले स्पर्शों के लिये क्षणिक की आकृति 100 ग्राम से

अधिक दाब के लिये नहीं बदलती और जीवनकाल भी परिमित रहता है। विपरीत नति में एन-प्रकार गै० आ० के स्पर्शों से धारा-प्रवाह संभव न हो सका। पी-प्रकार गै० आ० स्पर्श के लिये विपरीत नति में क्षणिक क्षय की आकृति 200 ग्राम से अधिक दाब के लिये नहीं बदलती और इस स्थिति में भी वाहक जीवनकाल परिमित रहता है।

चित्र 5 (अ, ब, स) : पी-सिलिकन (प्रतिरोधिता 1Ω से० मी०) स्पर्श के लिये विपरीत नति में क्रमशः 10, 100 तथा 350 ग्राम दाबों पर क्षणिक क्षय

एन-जरमेनियम : एन-प्रकार जरमेनियम (प्रतिरोधिता अज्ञात) से बने स्पर्श के लिये अग्रिम नति में क्षणिक की आकृति 5 ग्राम से कम दाब के लिये भी सुग्राहक थी। दाब क्रमशः बढ़ाने पर 50 ग्राम पर जीवनकाल लगभग शून्य हो गया तथा 100 ग्राम पर स्पंद आकृति पूर्णतः आयताकार हो गयी। विपरीत नति में कम दाब पर क्षणिक प्राप्त करना कठिन था। फिर भी, 10 ग्राम दाब पर क्षणिक

प्राप्त हुआ । 100 ग्राम दाब पर क्षणिक पूर्णतः समाप्त हो गया जिसका अर्थ है कि जीवनकाल लगभग शून्य हो गया । अग्रिम तथा विपरीत, दोनों नतियों में क्षणिक आकृति सिलिकन तथा गै० आ० स्पर्शों की तरह वक्रित थी ।

पी-प्रकार जरमेनियम

जैसा कि पूर्व प्रपत्र [1] में प्रतिवेदन किया गया है, पी-प्रकार जरमेनियम का व्यवहार असंगत होता है :

(अ) उस दशा में जब धातु स्पर्श पी-प्रकार जरमेनियम की अपेक्षा ऋण विभव पर है, तो क्षणिक आकृति दाब के लिये बहुत सुग्राहक है; जैसे 3 ग्राम से 30 ग्राम दाब तक । इससे अधिक दाब के लिये क्षणिक समाप्त हो जाते हैं अर्थात् वाहक जीवनकाल शून्य हो जाता है । ऐसे उच्चतर दाबों पर स्पंद आयाम भी नहीं बदलता जिसका अर्थ होगा कि स्पर्श की चालकता स्थिर रहती है ।

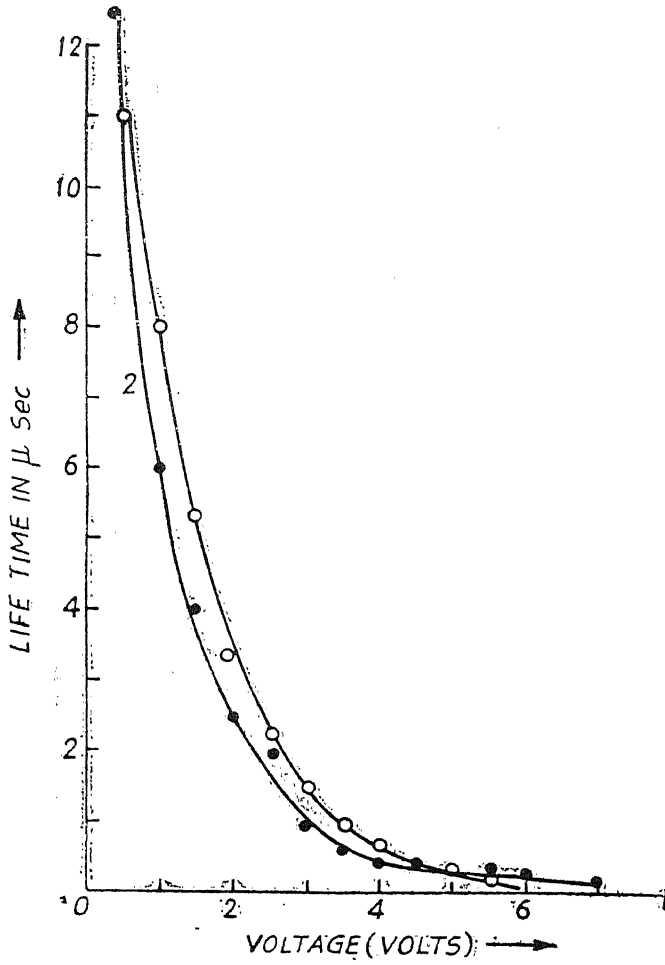
(ब) जब धातु स्पर्श पी-प्रकार जरमेनियम की अपेक्षा धनात्मक विभव पर है तो क्षणिक का अस्तित्व नहीं होता । फिर भी, दाब के साथ, जैसे शून्य दाब से 20 ग्राम दाब तक स्पंद आयाम कम होता है जिसका अर्थ है कि स्पर्श चालकता बढ़ती है । 20 ग्राम से अधिक दाबों पर स्पंद आयाम स्थिर रहता है ।

वाहक जीवनकाल पर रैखिक वोल्टता का प्रभाव

जैसा कि एरिकसन [7] द्वारा उल्लेख किया गया है आयताकार स्पंद पर रैखिक वोल्टता का अध्यारोपण करने पर क्षणिक क्षय की आकृति रैखिक हो जाती है । वर्तमान प्रयोगों में रैखिक वोल्टता का अध्यारोपण करने के लिये चित्र 1 में दिखाया गया परिपथ प्रयोग किया गया है । प्राप्त किये गये क्षणिक क्षय वोल्टता लगाने पर लगभग रैखिक हो जाते हैं । इसके अतिरिक्त वोल्टता बढ़ाने पर वाहक जीवनकाल कम होता जाता है । चित्र 6 में पी-प्रकार गैलियम आर्सेनाइड के स्पर्श के लिये दोनों नतिय में वाहक जीवन काल का वोल्टता के साथ विचरण दिखाया गया है । इस चित्र के अनुसार दोनों नतियों में वाहक जीवन काल का वोल्टता के साथ विचरण लगभग एकसमान है जो आश्चर्य-जनक है ।

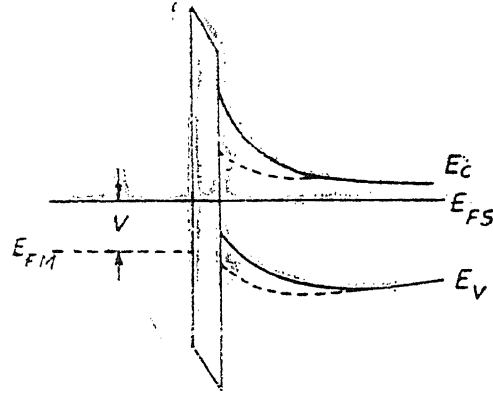
चुम्बकीय क्षेत्र का वाहक जीवनकाल पर प्रभाव

चुम्बकीय क्षेत्र का सिलिकन तथा जरमेनियम वाले स्पर्शों में वाहक जीवनकाल पर कोई विशेष प्रभाव नहीं देखा गया । अधिकतम चुम्बकीय क्षेत्र लगभग 8 किलोगॉस था ।

परशाद इत्यादि [8] द्वारा भी प्रतिवेदन किया गया है कि चुम्बकीय क्षेत्र का पी-एन संधियों में अल्पसंख्या वाहक जीवन काल पर नगण्य प्रभाव होता है । इस प्रकार जरमेनियम तथा सिलिकन के लिये वर्तमान अवलोकन, ऐसे अर्धचालकों से बनी पी-एन संधियों पर अवलोकनों से मेल रखते हैं ।

चित्र 6 : पी-प्रकार गैलियम आर्सेनाइड के स्पर्श के लिये वाहक जीवनकाल का डी० सी० वोल्टता के साथ विचरण। अग्रिम तथा विपरीत दोनों नतियों का प्रयोग किया गया है

विवेचना

जैसा कि चित्र 7 मे टूटी रेखाओं द्वारा दिखाया गया है, धातु-एन-प्रकार-अर्धचालक स्पर्शों के लिये अग्रिम नति में धातु से अर्धचालक में अंतःक्षेपित अल्प संख्या वाहकों की अन्योन्यक्रिया फर्मी तल से नीचे स्थित पृष्ठ अवस्थाओं के साथ होती है। यहाँ ऐसी कल्पना की जा सकती है कि चूँकि ऐसी पृष्ठ अवस्थाएँ फर्मी तल से नीचे हैं, अतः इनको दाता-प्रकार की अवस्थाएँ कहा जा सकता है (डैविसन तथा लीवाइन [9]) जो होल-पाश की तरह कार्य करती है। दाब देने पर यह होल-पाश केन्द्र पुनर्मिलन

केन्द्रों में बदल जाते हैं और इस कारण अल्पसंख्या वाहक जीवन काल कम हो जाता है। लेकिन वर्धित क्रिस्टल पृष्ठों पर दाब के नगण्य प्रभाव की व्याख्या इस प्रकार कर सकते हैं कि ऐसे पृष्ठों में विरूपण दोषों की सांद्रता निम्नतम है जो किसी अज्ञात प्रकार से उपर्युक्त अवलोकनों के लिये उत्तरदायी है।

चित्र 7 : धातु-आक्साइड एन-प्रकार अर्धचालक स्पर्श के लिये प्राचीर आकृति। एक अग्रिम नति V वोल्ट पर प्राचीर का रूपांतर टूटी रेखाओं द्वारा दिखाया गया है

दूसरी ओर विपरीत नति में धातु से अर्धचालक में अंतःक्षेपित वाहकों की अन्योन्यक्रिया फर्मी तल से ऊपर स्थित पृष्ठ अवस्थाओं के साथ होती है। इन पृष्ठ अवस्थाओं में चालकता पृष्ठ के इलेक्ट्रानों का स्थानीकरण है। जैसा कि पूर्व प्रपत्र [2] में कल्पना की गयी है ऐसी पृष्ठ अवस्थाएँ दाब बढ़ने पर चालकता पट्ट के साथ अतिव्यापित अवस्था में हो जाती हैं। इस कारण अनुप्रयुक्त स्पंद वोल्टता समाप्त होने पर 'अन्त: निर्मित विभव' (Built-in-potential) बहुत जल्दी क्षय होने के कारण क्षणिक आकृति ऊर्ध्वाधर हो जाती है। इसी कारण से पी-प्रकार अर्धचालकों से बने स्पर्शों के लिये भी विवेचना कर सकते हैं।

जरमेनियम में क्षणिक आकृति की विशेष दाब सुग्राहिता की इस प्रकार व्याख्या कर सकते हैं कि जरमेनियम में पृष्ठ अवस्था स्थानीकरण कम है। लेकिन पी-प्रकार जरमेनियम में, जहाँ धातु स्पर्श पी-जरमेनियम की अपेक्षा धनात्मक विभव पर होने पर क्षणिक का अस्तित्व नहीं है (अथवा क्षणिक ऊर्ध्वाधर है), इस बात का संकेत मिलता है कि पी-जरमेनियम में फर्मी तल से नीचे स्थित पृष्ठ अवस्थाएँ शून्य दाब पर भी संयोजकता पट्ट के साथ अतिव्यापी अवस्था में हैं। डेविसन तथा लीवाइन [9] के अनुसार स्वच्छ पी-जरमेनियम पृष्ठ पर संयोजकता पट्ट अग्र का झुकाव असंगत रूप से फर्मी तल की ओर है। ऐसा प्रतीत होता है कि स्वच्छ पृष्ठ के गुण वास्तविक पृष्ठ में भी प्रतिबिम्बित होते हैं। लेकिन वाहक जीवनकाल शून्य होने पर स्पंद आयाम की दाब निर्भरता का कारण स्पष्ट नहीं है।

पी-तथा एन-प्रकार गैलियम आर्सेनाइड स्पर्शों के लिये, जहाँ विपरीत नति में अधिकतम दाब पर भी क्षणिक क्षय ऊर्ध्वाधर नहीं है, यह प्रतीत होता है कि पट्ट अग्रों के निकट पृष्ठ अवस्था अस्तित्व नहीं

हैं जो पृष्ठ अवस्थाओं के परस्पर तथा बहुसंख्या वाहक पट्ट अग्र से अतिव्यापन में एक बाधा उपस्थित करता है।

क्षणिक वक्रता : उपर्युक्त क्षणिकों की आकृति लघु दाबों के अतिरिक्त अन्य दाबों पर वक्रित होती है। इस वक्रता की व्याख्या के लिये लैंडर हैंडलर तथा जियाकोलेट्टो [4] ने अंतःक्षेपित वाहकों के क्षय को चर घातांकी मानने के बदले त्रुटि-फलन प्रकार का माना। लेकिन इस प्रकार प्राप्त क्षणिक की वक्रता वर्तमान अवलोकनों की अपेक्षा बहुत कम है। इसके अतिरिक्त दाब द्वारा वक्रता में परिवर्तन के लिये उपर्युक्त गणनाओं में कोई चर पद प्राप्त नहीं होता। आर्मस्टोंग [10] ने बिन्दु स्पर्श शोधकों के लिये पी+-एन संधि प्रतिरूप लेकर क्षणिक आकृति का विश्लेषण किया है। इस प्रपत्र के अनुसार, यदि पी+-तथा एन-पक्ष दोनों को समतल अवस्था में मानें तो समीकरण $V=V(0)-(kTt/q\tau)$ प्राप्त होता है जहाँ $V(0)$ समय $t=0$ पर क्षणिक आयाम है तथा V समय $t>0$ पर क्षणिकआयाम है। इस समीकरण के अनुसार क्षणिक क्षय रैखिक है तथा जीवनकाल τ कम होने पर क्षणिक क्षय की प्रवणता $\triangle\psi\triangle t$ अधिक होती है। दूसरी ओर पी-पक्ष को बिन्दु आकृति का लेने पर, जबकि बिन्दु त्रिज्या विसरण दैर्घ्य की अपेक्षा बहुत कम है, निम्न समीकरण प्राप्त होता है :

$$V=V(0)-(kTDt/3qr_0^2)$$

यहाँ विसरण स्थिराँक

$$D=\frac{kT}{e}\,\mu e=\frac{kT}{e}\frac{e\tau}{m}$$

इस समीकरण के अनुसार भी क्षणिक क्षय रैखिक है। वाहक जीवन काल कम होने पर D का मान कम हो जाता है, अतः क्षणिक क्षय की दर कम होगी जो वर्तमान प्रयोगों के विपरीत है। अतः वर्तमान प्रयोगों के लिये धातु-अर्धचालक स्पर्श को समतली मानना श्रेयस्कर होगा। क्षणिक की वक्रता के लिये एक कल्पना यह हो सकती है कि अंतः क्षेपित वाहकों का जीवनकाल एक-सा नहीं है क्योंकि विभिन्न ऊर्जा तलों पर स्थित पृष्ठ अवस्थाएँ विभिन्न समय दरों के अनुसार क्षय होती हैं। इस कारण क्षणिक आकृति रैखिक न होकर वक्र प्राप्त होती है। इस कथन की अंशतः पुष्टि एरिकसन के कार्य से होती है।

वाहक जीवनकाल का धारा मान पर प्रभाव

स्थानीयकृत अवस्थाओं के माध्यम से सुरंगीकृत धारा के लिये वाहक जीवनकाल निर्भरता बेनडेनियल तथा ड्यूक [11] द्वारा धातु-आक्साइड, अर्धधातु संधि के लिये निम्न प्रकार से दी गयी है

$$J_i=\frac{e}{\pi\tau_i}\int_{\xi e-V}^{\xi e} dE\ \rho_{11}(E+E_b,\,i)$$

जहाँ $\tau_i(E_b,\,i,\,V)$ स्थानीकृत अवस्था का आक्साइड के माध्यम से क्षरण के लिये जीवनकाल, $E_b,\,i$ i वीं

परिबद्ध अवस्था की ऊर्जा, V अनुप्रयुक्त विभव; E सुरंगीकृत वाहक की कुल ऊर्जा तथा ξ_e अर्धधातु का पट्ट विस्तार है। इस प्रकार स्थानीकृत अवस्थाओं का क्षरण जीवनकाल कम होने पर धारा मान बढ़ जाता है।

निष्कर्ष

उपर्युक्त विवेचन से पिछले प्रपत्रों में वर्णित धातु-अर्धचालक प्रकार के स्पर्शों के धारा वोल्टता लक्षणों पर दाब के प्रभाव के कारण और अधिक स्पष्ट हो जाते हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि दाब का मुख्य प्रभाव अंत:क्षेपित वाहकों का जीवनकाल कम करने में होता है। वर्तमान प्रकार के स्पर्शों में धातु से वाहक का अंत: क्षेपण दोनों नतियों में हो सकता है। बहुत कम अर्धचालक प्रतिरोधिता वाले स्पर्शों के अतिरिक्त, जिन्हें वर्तमान अवलोकनों में प्रयोग नहीं किया गया है, दाब द्वारा ओहृमिक-तुल्य स्पर्श बनना संभव नहीं है। प्रयोगों द्वारा प्राप्त जीवनकाल, अंत:क्षेपित अल्पसंख्या वाहकों का जीवनकाल है अथवा स्थानीकृत अवस्थाओं का आक्साइड परत के माध्यम से क्षरण जीवनकाल-यह अभी स्पष्ट नहीं है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

उपलब्ध सुविधाओं के उपयोग की अनुमति देने के लिये लेखक राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला के निदेशक के प्रति कृतज्ञता-ज्ञापन करते हैं।

एक लेखक (विपिन कुमार) परमाणु ऊर्जा विभाग, बम्बई तथा दूसरा लेखक (सीताराम) वैज्ञानिक एवं प्रौद्योगिक अनुसंधान परिषद, दिल्ली द्वारा अनुसंधान फेलोशिप प्रदान करने के लिये आभार प्रकट करते हैं।

निर्देश

1. कुमार, वि०, राम, सी० तथा परशाद, रा०. (प्रकाशनाधीन)
2. कुमार, वि० तथा परशाद, रा०, (प्रकाशनाधीन)
3. कार्ड, एच० सी० तथा र्होड्रिक, ई० एच०, **सालिड स्टेट इलेक्ट्रानिक्स**, 1973, **16**, 365-74
4. लैंडर हैन्डलर, एस० आर० तथा जियाकोलेट्टो, एल० जे०, **प्रोसी० आई० आर० ई०**, 1955, **43**, 477
5. इमाई, टी०, उचिदा, एम०, सातो, एच० तथा कोबायाशी, ए०, **जापान जर्न० एप्लाइड फिजिक्स**, 1965, **4 (2)**, 102-13
6. मातुकुरा, वाई० तथा मिउरा, वाई०, **जापान जर्न० एप्लाइड फिजिक्स** 1965, **4**, 72-73
7. एरिकसन, डब्लू० टी०, Silicon Carbide, संपादक : ओकोन्नर, जे० आर० तथा स्मिल्टेन्स, जे० परगामन प्रेस, 1960

8. परशाद, आर०, मेहता, एस० सी० तथा सिंह, जी०, **इंडियन जर्न० प्योर एंड एप्लाइड फिजिक्स,** 1967, **5,** 490

9. डेविसन, एस० जी० तथा लीवाइन, जे० डी०, Soid State Physics संपादक : एरेनरीच, एच०, जाइट्ंस, एफ० तथा टर्नबुल, डी०, भाग 25, (1970), पृष्ठ 135 तथा 139 (एकेडेमिक प्रेस)

10. आर्मस्ट्रांग, **जर्न० एप्लाइड फिजिक्स,** 1956, **27 (4),** 420

11. बेनडेनियल, डी० जे० तथा ड्यूक, सी० बी०, **फिजिकल रिव्यू,** 1967, **160** (3), 679-685

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April, 1977, Pages 135-146

योगदर्शन में वर्णित मानव तंत्रिका तंत्र की क्रियाविधि

भुवन चन्द्र जोशी

एनेस्थिसिआलॉजी विभाग, मेडिकल कालेज, झांसी

[प्राप्त—जनवरी 22, 1977]

सारांश

प्राचीन योगग्रन्थों में तांत्रिकी विज्ञान के सजीव तथा यथातथ्य वर्णन मिलते हैं, जिन्हें कि पाश्चात्य विद्वानों ने गलत समझा है, या कतई अनदेखा कर दिया है।

प्रस्तुत निबन्ध में इन्हीं वैज्ञानिक तथ्यों को सही परिप्रेक्ष्य में दिया गया है।

तंत्रिका तंत्र की जीवनी शक्ति "प्राण" एक विद्युत ऊर्जा है जो कि विश्व की समष्टि जीवनी शक्ति का ही एक भाग है।

देह में प्राण के दस अनुभाग हैं जो स्वचल तंत्रिका तंत्र, संवेदना ग्रहण तथा पेशीक्रियाओं (autonomic, somatic motor and somatic sensory functions) का नियंत्रण करते हैं।

सुषुम्णा में वर्णित षटचक्र, केन्द्रीय तंत्रिका अक्ष में भौतिक रूप में उपस्थित तंत्रिका केन्द्र हैं जो कि अपने आरोही और अवरोही तंत्रिकापथों की सहायता से विभिन्न जीवधर्मी क्रियाओं को नियंत्रित करते हैं। उदाहरणतः कामक्रिया का नियामक मणिपूर चक्र है।

योग विज्ञान की सही जानकारी के लिये हमारे वैज्ञानिकों को योग ग्रन्थों को मूल संस्कृत भाषा में स्वतंत्र रूप से अध्ययन करना चाहिये।

Abstract

The concept of human nervous function in ancient Yogasastra. *By* B. C. Joshi, Department of Anaesthaesiology, Medical College, Jhansi.

Ancient Yogic texts contain excellent and factually correct accounts of neurophysiology, which have been overlooked or misunderstood by Western scholars.

This paper aims to present a small part of this information in the right prespective.

'Prana' the vital energy activating the nervous system is electrical in nature and is a part of the cosmic energy which activates all the nature.

In the body ten subdivisions of Präna perform the same functions as are ascribed to the autonomic and somatic motor and sensory systems.

The six chakras in the Susumna are nervous structures physically present in the neuräl axis. They are connected by ascending and descending tracts and make intersegmental connections within the spinal cord. They perform specific physiologic functions allotted to them. e. g. the sexual functions are controlled by Manipoor chakra.

To obtain correct information on Yoga it is necessary that scientists make independent study of original Yoga texts.

पाश्चात्य ऐतिहासज्ञों की चिरसम्मत मान्यता है, कि तंत्रिका तंत्र का सर्वप्रथम ज्ञान योरप के चिकित्साशास्त्रियों को हुग्रा था (सिगर, एस० एंड ग्रंडरवुड, ई० ए० 1962)।

भारतीय योगशास्त्र के कतिपय ग्रंथों में जो कि निर्विवाद रूप से बुद्ध काल (600 ई० पू०) से पूर्ववर्ती हैं, मानव तंत्रिका तंत्र की रचना तथा क्रिया के ऐसे जागृत तथा यथार्थ वर्णन मिलते हैं, कि आधुनिक प्रबुद्ध तंत्रिकाशास्त्री भी उन्हें काट नहीं सकते। ये वर्णन तंत्रिका ग्रावेग के स्वरूप और उसके प्रवाह [Nature and transmission of nervous impulse] से लेकर सुषुम्णा के तंत्रिका पथों [Spinal nerve tracts] के कार्यों तक से संबंधित हैं, जैसा कि प्रस्तुत लेख में स्पष्ट किया गया है।

उपलब्ध साहित्य का पर्यवेक्षण

प्राचीन योग ग्रंथों में तांत्रिकी विज्ञान का प्रथम विशद वर्णन योगयाज्ञवल्क्य में मिलता है। यह उत्तरवैदिककालीन ग्रंथ है।

ग्राजकल प्राप्य उपनिषदों में जिनकी कुल संख्या दो सौ अठारह है, तांत्रिकी के वर्णन यत्र-तत्र मिलते हैं। महाभारत के ग्रारण्यकपर्व में इस विषय का उत्तम स्पष्टीकरण मिलता है।

मध्ययुग में अनेक सिद्धयोगी हुए जिनकी रचनायें संहिताओं के रूप में उपलब्ध हैं।

इन ग्रंथों के ग्रध्ययन से ज्ञात होता है कि आर्यों ने योगविज्ञान के सुदृढ ग्राधार पर ही भारतीय संस्कृति की नींव स्थापित की थी (गीता 7|2-5 तथा गीता 13/1-11)।

'षट्चक्रनिरूपण' तांत्रिकी विज्ञान की सर्वाधिक महत्वपूर्ण पुस्तक है। यह श्री तत्वचिन्तामणि नामक ग्रंथ का छठा अध्याय है जिसे पूर्णानन्द स्वामी ने पन्द्रहवीं शताब्दी में संकलित किया था। मूल

हस्तप्रतिलिपि अभी कलकत्ता में सुरक्षित है। सर जौन वुड्रफ ने इसका अंग्रेजी अनुवाद "सर्पेन्ट पावर" के नाम से किया है जो कि अत्यन्त भ्रमपूर्ण है, जैसा कि मैंने इस लेख में तथा पूर्ववर्ती लेख में सिद्ध किया है (जोशी, भुवनचन्द्र 1976)।

योग पर आधुनिक लेखकों द्वारा लिखित काफी पुस्तकें मिलती हैं पर अधिकांशतः वे योग विद्या के मूल उद्देश्य को न समझ पाने के कारण अर्थहीन हैं।

योग दर्शन में प्राणतत्व का विचार (The Prana Concept of Yoga philosophy)

प्रकृति के सम्पूर्ण कार्यों को चलाने वाली जीवनी शक्ति के समष्टि रूप को ही योगशास्त्र "प्राण" की संज्ञा देता है।

"तस्मिन् अपः मातरिश्वा दधाति"

ईशावास्य उप० ।4।

उपर्युक्त वाक्य के शांकरभाष्य[1] से सिद्ध होता है कि समष्टि प्राण ही वह ऊर्जा हैं जिससे सूर्य तपता है, अग्नि जलती है, मेघ बरसते है तथा जीवधारी जीते हैं।

अन्न आदि वनस्पतियाँ भी प्राण से ही जीवित रहती हैं।[2]

मनुष्य शरीर में प्राण

प्राण का स्थान मस्तिष्क में है।[3] प्राण ही वह रस्सी है जिससे जीवात्मा इस स्थूल शरीर से बँधा रहता है।[4] भोजन से प्राण का पोषण होता है। देह के अंग और ऊतक प्राण के न रहने से सूख जाते हैं।[5]

मस्तिष्क से प्राण सुषुम्णा की राह से होकर समस्त देह में प्रवाहित होता है।[6]

प्राण के प्रवहन की विधि (Transmission of Prana impulse)

तंत्रिकाओं में प्राण ऊर्जा किस रीति से प्रवाहित होती है यह प्राण शब्द की व्युत्पत्ति से स्पष्ट होता है

"यस्मात् प्रयाति अणुः भूत्वा तस्मात् प्राण इतीर्यते"

"यह अणु के रूप में चलता है इसलिये प्राण कहलाता है।" यह उसी प्रकार है जैसे कि सुचालक में इलेक्ट्रानों का प्रवाह होने से विद्युत् ऊर्जा चलती है। तंत्रिका आवेग (Nerve impulse) के चलने का भी यही तरीका आज विज्ञानसम्मत है।

यह विद्युत् ऊर्जा रूपी प्राण ही शरीर की सब क्रियाओं का प्रेरक है।

जीवित व्यक्ति में प्राण ऊर्जा के प्रवाह से सम्पूर्ण तंत्रिका अक्ष निरन्तर विद्युत्मय होकर जगमगाता रहता है[8] (जोशी, भुवनचन्द 1976)।

तंत्रिका अक्ष के इस जीवन्त रूप की कल्पना आधुनिक तंत्रिकाशास्त्री अभी तक कर नहीं पाये हैं, क्योंकि उनका अधिकांश अध्ययन मृत देह के अंगों पर ही होता है।

दस प्राण

योगयाज्ञवल्क्य के अनुसार शरीर में प्राण के दस अनुभाग हैं, जो विभिन्न जीवधर्मी क्रियाओं के प्रेरक तथा नियंत्रक हैं। वे इस प्रकार हैं [9,10]

अनुभाग 1. प्राण—यह कान के पास से लेकर वक्ष तथा ऊपरी उदर तक क्रिया करता है। नच्छ्वास-उच्छ्वास क्रिया [Pulmonary stretch reflex], खांसी प्रतिवर्त [Cough reflex] तथा भोजन सभी पाचक रसों का नियंत्रण करता है। [11] [12] इस प्रकार यह शीर्ष परानुकम्पी तंत्र (Cranial Parasympathetic) के समरूप कार्य करने वाला तथा उसका पर्यायवाची है (चित्र 1)।

अनुभाग 2. अपान—यह श्रोणि गुहा (Pelvic cavity) के अंगों में क्रिया करता है[13] यह मिलाशय (Rectum), मूत्राशय (Urinary bladder), शुक्राशय (Seminal vesicles) तथा गर्भाशय (Uterus) के पदार्थों का विसर्जन कराने वाला है।[12] इस प्रकार यह त्रिक के परानुकम्पी तंत्र (Sacral parasympathetic system) के समरूप कार्य करने वाला तथा उसका पर्यायवाची है (चित्र 1)।

अनुभाग 3. समान—यह शरीर में सर्वत्र मौजूद रह कर रक्त परिसंचरण (Circulation) का नियंत्रण करता है [14] [15]। भोजन का रस तथा देह के उत्सर्जी पदार्थ रक्त के साथ ही साथ परिसंचरण करते हैं।[15] इस प्रकार यह समान वायु अनुकम्पी तंत्र (Sympathetic system) के अनुरूप कार्य करने वाला उसका पर्यायवाची है।

अनुभाग 4. उदान—यह देह की सभी ऐच्छिक मांसपेशियों के साधारण कार्य, व्यायाम कार्य तथा बलप्रदर्शन के कार्यों का प्रेरक और नियंत्रक है।[17] [18] इस प्रकार यह प्रेरक तंत्रिका संस्थान (Somatic motor control system) समरूप कार्य करने वाला उसका पर्यायवाची है।

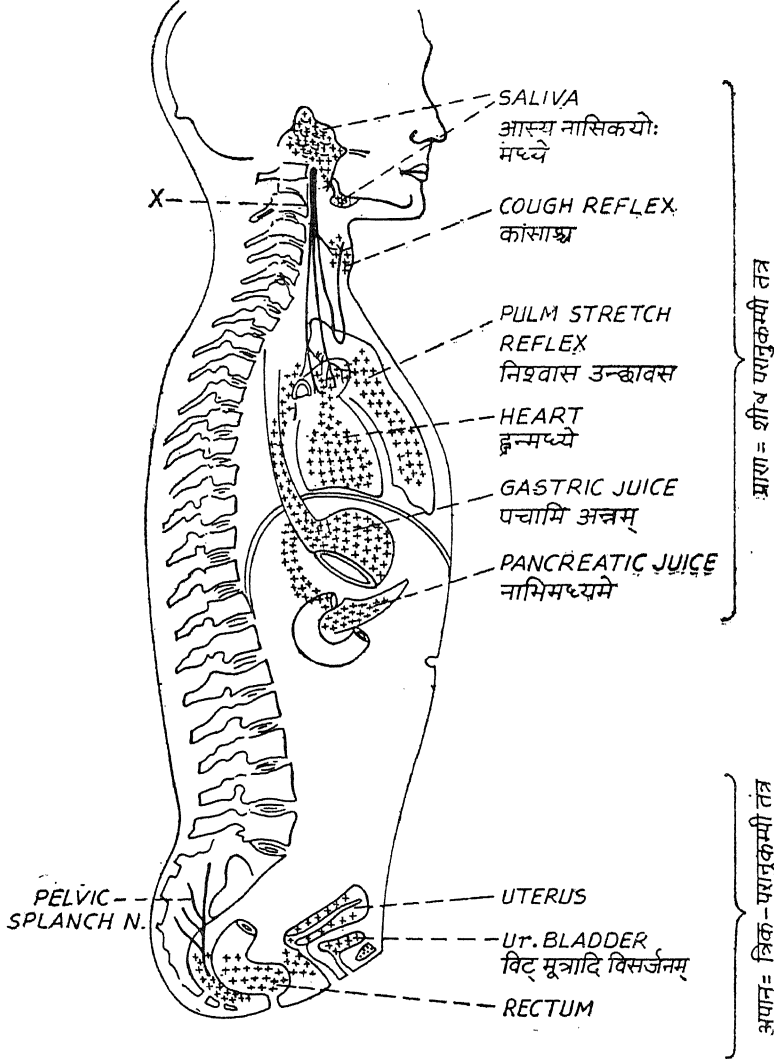
प्राण के अन्य अनुभाग ये हैं [9]

5. व्यान, 6. नाग, 7. कूर्म, 8. कृकर, 9. देवदत्त, 10. धनंजय।

दशम प्राण धनंजय मृत्यु के उपरान्त भी देह के अंगों में बना ही रहता है [16] अर्थात् व्यक्ति की मृत्यु के उपरान्त भी उसकी देह के अंग और ऊतक जीवित बने रहते हैं। यह एक क्रान्तिकारी विचार है जिसकी परिचर्चा हम आगे करेंगे।

प्रज्ञा और प्राण

दस प्राणों के उपर्युक्त वर्णन से ज्ञात होता है कि ये सभी केवल प्रेरक तंत्रिका कार्यों (Automomic and Somatic motor functions) के ही नियामक हैं।

संवेदक तंत्रिका कार्यों (Sensory nervous functions) को योगशास्त्र "प्रज्ञा" या चेतना की संज्ञा देता है। प्रज्ञा हमारी चेतन आत्मा का ही प्रवर्ध (Projection) है। इसका स्वरूप प्राण के समान ही विद्युतमय है। प्रज्ञा और प्राण दोनों शरीर में एक ही साथ रहते तथा एक ही साथ शरीर को छोड़ते हैं।[19] चक्षु, कर्ण, जिह्वा और उपस्थ आदि संवेदना ग्राहकों पर आरूढ़ होकर प्रज्ञा ही इन अंगों से प्राप्त सूचना को बुद्धि के पास पहुंचाती है।[20]

चित्र 1. दस प्राण

षटचक्रों का वास्तविक स्वरूप

योगशास्त्र के अनुसार सुषुम्ना में छः तंत्रिका-चक्रों की रचना है (जोशी, भुवन चन्द्र 1976)।

आधुनिक विद्वानों के मत से ये रचनायें तंत्रिका अक्ष में भौतिक रूप में मौजूद नहीं हैं (पंडित, एम० पी० 1972 तथा वुड्रफ, जे० 1958)। यह विचार नितान्त भ्रमपूर्ण है ऐसा मैं नीचे सिद्ध करता हूँ।

षट्चक्रों का सम्पूर्ण वर्णन इस लघु निबन्ध में देना सम्भव नहीं है, तथापि मातृकमिदतन्त्र से उद्धृत अंश द्वारा मणिपूरचक्र के एक भाग का वर्णन नीचे देता हूँ, जिससे षटचक्रों की बनावट की झांकी मिलती है। (21)

"सुषुम्णा में मणिपूर नामक महापद्म (महान तंत्रिका केन्द्र) है। इसके बाहर की तरफ नाभि पद्म नामक एक छोटा तंत्रिका केन्द्र संलग्न है, जिसके अन्दर काम क्रिया की आहुति लेने वाला कामाग्नि का धारक होम कुण्ड (Firepit of sex) है। यह कुण्ड तीन नालों (Nerve tracts) से सुसज्जित है।

ऊर्ध्वनाल (Ascending tract) सहस्रार (Cerebrum) तक जाता है। यह शुक्ररूपी अमृत का धारक है तथा स्तनों की वृद्धि कराता है।

मध्यनाल (Middle tract) वृत्ताकार (circular) है जो सुषुम्ना के अन्दर मूलाधार चक्र से अन्तःचाप सम्बन्ध (intersegmental connection) बनाता है।

अधोनाल (desending tract) योन्यग्र (clitoris) या लिङ्गाग्र (glaus penis) का प्रदायक होकर आनन्द की अनुभूति देता है। संभोग क्रिया द्वारा जो चरम आनन्द का अनुभव होता है वह इन्हीं तंत्रिका मार्गों के द्वारा सहस्रार तक पहुँचता है।

इस स्थान पर कामाग्नि के जनक प्राण की उपस्थिति की पुष्टि षटचक्र निरूपण से होती है। (22)

इस सन्दर्भ में श्री वुड्रफ (1958) के निम्न वक्तव्य पर ध्यान दें।

"षट्चक्रों के अधिष्ठान इस स्थूल देह से भली-भांति परिचित होते हुए भी जीवधर्मी विज्ञान षटचक्रों को देह में उपस्थित चेतना केन्द्रों के रूप में जानता नहीं है। जो लोग इनको वहां पर खोजेंगे वे सदैव ही निराश होकर लौटेंगे।"

इससे स्पष्ट है कि श्री वुड्रूफ योगशास्त्र के इस निर्देश को हृदयंगम कर नहीं पाये जो कि इतने स्पष्ट रूप से षटचक्रों के जीवधर्मी स्वरूप को समझाता है।

विवेचना

योगशास्त्र में वर्णित केन्द्रीय तंत्रिका तंत्र की स्थूल तथा सूक्ष्म रचना का दिग्दर्शन में अपने अन्य लेख में कर चुका हूँ (जोशी, भुवनचन्द्र 1976)।

प्रस्तुत लेख में निम्न तथ्यों का विश्लेषण किया गया है।

1. चराचर जगत में तथा मानवदेह में प्राण का स्वरूप ऊर्जा का रूप है।

2. दश प्राण जिन्हें आधुनिक विज्ञान autonomic तथा Somatic motor control System के नाम से जानता है, तथा प्रज्ञा जो कि Sensory System का पर्याय है।

3. तंत्रिकाओं में आवेग का चलना एक विद्युत प्रक्रिया है।

4. व्यक्ति की मृत्यु के अनन्तर देह के अंग जीवित रहते हैं।

5. षटचक्रों की सुषुम्ना में भौतिक उपस्थिति तथा विद्युत् प्रवाह के कारण तंत्रिका अक्ष का प्रदीप्त रहना।

योग की यह धारणा कि मृत देह में प्राण बना रहता है यह एक क्रान्तिकारी विचार है। पिछले दशक की अंगप्रत्यारोपण की सफलताओं ने इस सत्य को सिद्ध कर दिया है जिसे कि योगशास्त्र पांच हजार वर्ष पूर्व से मानता रहा है। इसके कारण चिकित्सकों को मृत्यु की परिभाषा ही बदलनी पड़ी।

योगशास्त्र अन्न तथा वनस्पतियों में भी प्राण के होने की पुष्टि करता है जो कि एक वैज्ञानिक सत्य है।

पाश्चात्य विद्वानों का पूर्वाग्रह

यह बात तो सर्वमान्य है कि प्रधान उपनिषद ग्रंथ, योगयाज्ञवल्क्य तथा महाभारत ये सब बुद्धकाल (600 ईसवीपूर्व) से पूर्ववर्ती रचनायें हैं। हम जानते है कि आधुनिक तंत्रिका विज्ञान का पूर्ण विकास मात्र पिछली एक या डेढ़ शताब्दी में हुआ है यद्यपि प्राचीन यूनानियों को भी इसका आरम्भिक ज्ञान था।

यूनान के अलग्जैन्ड्रियन स्कूल के इरासिस्ट्रासस (250 ई० पू०) के द्वारा प्रतिपादित न्यूमैटिज्म का सिद्धान्त स्पष्ट ही उन भारतीय योगियों के प्राणवायु के सिद्धान्त से प्रभावित है जिन्हें अलक्जेंडर अपनी भारतविजय के अनन्तर अपने साथ ले गया था (कैम्ब्रिज हिस्ट्री आफ इंडिया भाग I)।

इस प्रकार पाश्चात्य ऐतिहासज्ञों की यह दलील कि सर्वप्रथम योरप ने तांत्रिकी का ज्ञान प्राप्त किया था बिल्कुल थोथी है (सिगर, एस० एंड अंडरवुड, ई० ए० 962)।

इस सन्दर्भ में ग्रे की अनाटमी (1973) के इन स्वर्णाक्षरों का अवलोकन करें—"माना कि प्राचीन काल में वैज्ञानिक शोध के हेतु उच्च तकनीकी जानकारी का अभाव था, तथा शोध के साधन निहायत मामूली थे, पर तो भी यूनानी स्कूलों की पूर्ववर्ती विश्व की सभी सभ्यताओं के द्वारा तांत्रिकी विषयक निरीक्षण अथवा केवल अनुमान मात्र का भी सर्वथा अभाव होना बड़ा आश्चर्यजनक है।"

मेरे द्वारा उल्लिखित योगविद्या के उपर्युक्त तथ्य को देखते हुए, इन लेखक महाशय का पूर्वाग्रह स्वतः सिद्ध है।

योग का दृष्टिकोण

चेतना के जिस धरातल पर हम मानव जीते हैं उससे अधिक ऊँचे चैतन्य को प्राप्त कराना ही योगविद्या का एकमात्र उद्देश्य है।

भूख और कामिच्छा ये दो महाशक्तियाँ ही इन्सान को जिन्दगीभर भटकाती रहती हैं। अतः इनकी जैविक क्रियाविधि (Biological mechanism) को समझ कर इनपर विजय प्राप्त करना यह योगसाधना की प्रथम सीढ़ी है।

इस प्रकार केवल आत्मोन्नति हेतु ही योगशास्त्र तांत्रिकी के सम्पूर्ण ज्ञानभंडार का उपयोग करता है। विज्ञान की विद्योचित उन्नति (Academic advancement of science) या रोगों के उपचार (Therapeutics) में सहायता करना योग विद्या का उद्देश्य नहीं है।

अनेक रोगों के उपचार में योग से सफलता अवश्य मिलती है पर यह उसका गौण फल है।

इस प्रकार योग का दृष्टिकोण एक सही दृष्टिकोण है और इसको भलीभाँति समझने के लिये आवश्यक है कि हमारे वैज्ञानिक प्राचीन योग ग्रंथों का मूल संस्कृत में स्वतन्त्र रूप से अध्ययन करें।

निष्कर्ष

1. योग दर्शन का विकास उत्तरवैदिककाल में हुआ था।

2. चराचर जगत् की जीवनी शक्ति ही प्राण ऊर्जा कहलाती है। यह विचार योगदर्शन का एक स्तम्भ है।

3. देह में विभिन्न जैव क्रियाओं के नियामक दस प्राण हैं जिन्हें आधुनिक तंत्रिकाशास्त्री Sympathetic, parasympathetic, somatic sensory तथा somatic motor systemic के नाम से जानते हैं।

4. तंत्रिकाओं में प्राण के आवेग का चलन एक विद्युत प्रक्रिया है। निरन्तर विद्युत प्रवाह के कारण जीवित व्यक्ति का तंत्रिका अक्ष प्रकाश से जगमगाता रहता है।

5. केन्द्रीय तंत्रिका अक्ष में छः प्रधान तंत्रिका चक्र मौजूद हैं जो अपने आरोही और अवरोही संचार पदों (Ascending and descending nerve tracts) के सहित शरीर की विभिन्न जीवधर्मी क्रियाओं का संचालन करते हैं। उदाहरणतः मणिपुर चक्र प्रजनांगों की संवेदना को मस्तिष्क को भेजता, कामक्रिया का नियंत्रण करता तथा स्तन आदि लैंगिक लक्षणों की वृद्धि करता है।

6. पाश्चात्य विद्वान इस महान योगविज्ञान को अनदेखा करके योरप को तांत्रिकी का आविष्कारक बताते हैं, यह असत्य है।

पठनीय

(1) तस्मिन्नपो मातरिश्वा दधाति। ईशावास्य उप०। 4।

शांकरभाष्य—तस्मिन् आत्मसत्वे सति नित्य चैतन्यस्वभावे मातरिश्वा वायु यस्मिन्नोतानिप्रोतानि यत्सत्रसंज्ञकं सर्वस्य जगतो विधायितृ समातरिश्वा, अपः कर्माणि प्राणिनां चेष्टालक्षणानि अग्नि आदित्य पर्जन्यानादीनाम् ज्वलन दहन प्रकाशन अभिवर्षणादि लक्षणानि दधाति विभजति इत्यर्थ : ।

(2) पूयति वाऽन्नं ऋते प्राणात्

वृहदारण्यक उप०

(3) मूर्धानमाश्रितो वन्हिः शरीर परिपालयन्
प्राणो मूर्ध्नि चाग्नौ च वतमानो विचेष्टते ।।

महाभारत आरण्यक पर्व 203 । 14

(4) प्राणस्य का गतिरित्यान्नमिति होवाच ।

छान्दोग्य उप० 1 । 8

(5) रसः प्राणो हि वा अंगानाम् रसः तस्मात् यस्मात्
कस्मात् च अंगात् प्राण उत्क्रामति तदेव तत् शुष्यति
एष हि व अंगानाम् रसः ।।

वृहदारण्यक उप० 1 । 3 । 19

(6) इडा पिंगला सौषुम्णा प्राणमार्गे च संस्थिता ।
सततं प्राण वाहिन्यः चन्द्रसूर्याग्निदेवता ।।

योगशिखोपनिषत् 21-22

(7) यस्मात्प्रयात्यणुर्भूत्वा तस्मात्प्राणइतीर्यते ।

(8) अधश्चोर्ध्वश्च कुण्डल्या परीत्य प्राणसंज्ञकः
तिष्ठन्नेतेषु चक्रेषु प्रकाशयतिदीपवत् ।।

योगयाज्ञवल्क्य 4 । 5 ।

(9) प्राणोऽपानः समानश्च उदानो व्यान एवच ।
नागः कूर्मोऽथक्रकरो देवदत्तो धनंजयः
एते नाडीषु सर्वासु चरन्ति दशवायवः

योगयाज्ञवलल्क्य 4 । 47-48

(10) रोमरन्ध्रैश्च नवमि विण्मूत्रादिविसर्जनम्
कुर्वन्ति वायवः सर्वे शरीरेषु निरन्तरम् ।।

योगयाज्ञवल्क्य 4 । 65

(11) आस्य नासिकयोर्मध्ये हृन्मध्ये नाभिमध्यमे ।
प्राणालयइतिप्राहुः पादांगुष्ठेऽपिकेचन ॥

योगयाज्ञ० 4 । 50

(12) निश्वासउच्छ्वासकासाश्च प्राणकर्मेतिकीर्त्यते
अपानावयोः कर्मैतद्विण्मूत्रादि विसर्जनम् ॥

योगयाज्ञ० 4 । 67

प्राणापान समायुक्तः पचाम्यन्नं चतुर्विधम

गीता 15 । 14

(13) अपाननिलयं केचित् गुदमेढ् उरू जानुषु ।
उदरे वृषणे कट्यां जघनौ तौ वदन्तिहि

योगयाज्ञ० 4 । 52

(14) समानवायुरेवेकः साग्निर्व्याप्याव्यवस्थितः ।
अग्निभिः सह सर्वत्र सांगोपांग कलेवरे ॥

योगयाज्ञ० 4 । 56

समानवायुनासार्धरसं सर्वासु नाडिषु ।
व्यापयन् धातु रूपेण देहे चरति मारुतः ॥

योग याज्ञवल्क्य 4 । 65

(15) धातुष्वग्निस्तुविततः सतुवायु समीरितः ।
रसान्धातूंश्च दोषाश्च वर्तयन्परिधावति ॥

महाभारत आरण्यकपर्व 203 । 21

(16) उदानकर्म तत्प्रोक्तं देहस्य उन्नयनादिषत्

योगयाज्ञ० 4 । 68

(17) प्रयत्ने कर्मे बले य एकस्त्रिषु वर्तते ।
उदानकर्म तत्प्रोक्तं अध्यात्मविदुषोजनाः ॥

महाभारत आरण्यकपर्व 203 । 19

(18) न जहाति मृतं वाडापि सर्वव्यापी धनंजयः ।

योगशिखोपनिषत् । 126 ।

(19) यो वै प्राणः सा प्रज्ञा या वा प्रज्ञा स प्राणः
सह हिएतौ अस्मिन् शरीरे वसतः सह उत्क्रामन्तः
अथ खलु यथा प्रज्ञायां सर्वाणिभूतानि एकं भवन्ति
तत् व्याख्यास्यामः

कौशीतकीब्राह्मणोपनिषद 3 । 4

(20) प्रज्ञया घ्राणं समारुह्य घ्राणेन सर्वान् गन्धान आप्नोति ।
प्रज्ञया चक्षुं समारुह्य चक्षुषा सर्वाणि रूपानि आप्नोति
प्रज्ञया श्रोत्रंसमारुह्य श्रोत्रेन सर्वान् शब्दानाप्तोति ।
प्रज्ञया जिह्वामारुह्य जिह्वया सर्वान्रसानाप्नोति ।
प्रज्ञया शरीरंमारुह्य शरीरेण सुखदुखे आप्नोति
प्रज्ञया उपस्थमारुह्य उपस्थेन रतिं प्रजातिमाप्नोति ।

कौशतिकीब्रह्मणोपनिषद 3 । 6 ।

(21) मणिपूरस्यवाह्ये तु नाभिपद्मंनोहरम्
अष्टपत्र तथा वृन्तं तन्मध्ये कुण्डदुर्लभम् ॥
चतुरस्नाडिकंदेवि तत्कुण्डं कामरूपकम् ।
एवं कुण्डं महेशानि नालत्रयविभूषितम् ॥
ऊर्ध्वनालं सहस्रारे परामृतविभूषितम् ।
मध्यनालं नाभिमूले मूलाधारे च सुन्दरि ॥
आलिंगाग्रमधोनालं सदानन्द मयं शिवे ।
होमकुण्डमिदं देवि सर्वतन्त्रे परिष्कृतम् ॥

मातृकाभेद तन्त्रे तृतीय पटलः । 7—23

मणिपूरं महापद्मं सुषुम्णा मध्य संस्थितम् ।
तस्यनालेनदेवेशि नाभिपद्मं मनोहरम् ॥
वक्त्रत्रयसमायुक्तं सदाशुक्र विभूषितम् ।
ऊर्ध्वनालं सहस्रारे अतः शुक्र विभूषितम् ।
तस्मादेव स्तनद्वन्दं वर्धवे च दिने दिने ॥
मध्यनालं सुषुम्णान्तं वृताकारं सुशीतलं ।
आलिंगाग्रमधोनालं सदानन्दमयंशिवे ।
शृणुचावंगि सुभगे तन्मध्येलिंग ताडनात् ॥
यद्रूपंपरमानन्द तन्नास्ति भुवनत्रये ॥

मातृकमिदतन्त्रे 2 । 4—8

(22) कोंण तत् त्रैपुराख्यं तडिदिवविलसत्कोमलं कामरूपं ।
कन्दर्पो नाम वायुर्विलसति सतत तस्यमध्मेसमन्तात् ।

षट्चक्रनिरूपण । 9

निर्देश

1. ईशावास्य उपनिषद 1972 पन्द्रहवां संस्करण, शांकर भाष्य सहित, गीताप्रेस, गोरखपुर
2. कैम्ब्रिज हिस्ट्री आफ इंडिया, भाग प्रथम पृ० 359. सं० रैपसन, ई० जे०, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस
3. ग्रेज अनाटमी, 1973 पृ० 735, 35 वां संस्करण, चर्चिल लिविंगस्टन लिमिटेड, एडिनबर्ग
4. छान्दोग्य उपनिषद 1962 चौथा संस्करण, गीताप्रेस, गोरखपुर
5. जोशी भुवनचन्द्र योगशास्त्र में तंत्रिका तंत्र का तथा कथित रहस्यमय वर्णन, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका 1976 3, 273-293
6. ब्रिग्स, जी० डब्लू० 1938 गोरखनाथ एंड कानफटा, योगीज पृ० 303 प्रथम संस्करण; मोतीलाल बनारसीदास, दिल्ली
7. वृहदारण्यक उपनिषद, 1962 दूसरा संस्करण, गीता प्रेस, गोरखपुर
8. महाभारत, आरण्यकपर्व 1969 प्रथम संस्करण, श्रीपाद दामोदर सातवलेकर, स्वाध्यायमंडल पारडी, बुलसाड
9. मातृकभिदतन्त्र 1933, कलकत्ता संस्कृत सीरीज, सं० चिन्तामणि भट्टाचार्य, मेट्रोपोलिटन पब्लिशिंग हाऊस, कलकत्ता
10. योगयाज्ञवल्क्यम्, प्रथम संस्करण, सं० के० साम्वशिवशास्त्री महाराजा आफ त्रावणकोर, त्रिवेन्द्रम
11. योगशिखोपनिषत् उपनिषत् संग्रह पृ० 467 प्रथम संस्करण, मोतीलाल बनारसीदास, दिल्ली
12. सिगर, एम० तथा अंडरवुड, ई० ए० 1962 ए शार्ट हिस्ट्री आफ मेडिसिन, प्रथम संस्करण पृ० 16 आक्सफोर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस
13. श्रीमत् भगवत् गीता तत्वविवेचनीटीका 1965, सं० जयदयाल गोयन्का गीता प्रेस, गोरखपुर
14. षट्चक्रनिरूपण, आर्थर एवलोन तांत्रिक टैक्स्ट सीरीज भाग 2, सन् 1941 सम्पादक तारानाथ विद्यारत्न, लुज़ाक एंड को० लंदन
15. वुड्रफ जे० 1958. सर्पेन्टपावर, छठा संस्करण पृ० 110. गणेश एंड कम्पनी, मद्रास

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 20. No. 2, April, 1977, Pages 147-152

फूरिए श्रेणी की नारलुण्ड परम संकलनीयता गुणक पर टिप्पणी

सरजू प्रसाद यादव
गणित विभाग, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अप्रैल 4, 1976]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में फूरिए श्रेणी की नारलुण्ड परम संकलनीयता गुणक से सम्बन्धित दो परिणामों को दर्शाया गया है। इन परिणामों के विशेष उदाहरणों को भी दिये गये हैं।

Abstract

A note on absolute Nörlund summability factors of Fourier series. *By* Sarjoo Prasad Yadav, School of Studies in Maths. and Statistics, Vikram University, Ujjain.

In this note we prove two results of absolute Nörlund summability factors of Fourier series. Particular applications have also been deduced.

1. माना $f(x)$ लेबेस्क अनुकलनीय फलन है जो प्रखण्ड $(0, \pi)$ में परिभाषित है और 2π आवर्तनांक का आवर्ती फलन है। $f(x)$ से सम्बन्धित फूरिए श्रेणी

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{0}^{\infty} A_n \tag{1·1}$$

है जहाँ पर a_n, b_n फूरिए गुणांक हैं।

माना $$\phi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x) \tag{1·2}$$

माना कि $\{p_n\}$ वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम है जहाँ

$$P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n,\ p_n,\ p_{-k}\ p_{-k} = 0,\ k \geqslant 1.$$

2· हम निम्न प्रमेय सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 1

माना $\{m_n\}$ **एक दिष्ट अवरोही अनुक्रम** (monotonic decreasing sequence) **है जहाँ पर**

$$\sum_{1}^{\infty} m_n \cdot n^{-1} \log n < \infty \tag{2·1}$$

अब यदि

$$\int_t^{\delta} \frac{|\phi(u)|}{u}\, du = O\left(\log \frac{1}{t}\right), \ t \to 0 \tag{2·2}$$

$\delta > 0$ **तो श्रेणी**

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{m_n \, . \, P_n \, . \, A_n}{n} \tag{2·3}$$

संकलनीय $|N, p_n|$ होगी जब $\{p_n\}$ अनृणात्मक अवर्द्धमान हो और $\{p_n - p_{n+1}\}$ अवर्द्धमान हो।

प्रमेय 2

माना $\{m_n\}$ धनात्मक एकदिष्ट अवनतशील अनुक्रम है जो प्रतिवन्ध

$$\sum_{1}^{\infty} m_n \cdot P_n^{-1} \log n < \infty \tag{2·4}$$

पूरी करता है तब श्रेणी

$$\sum_{1}^{\infty} m_n \, . \, A_n(x) \tag{2·5}$$

संकलनीय $|N, p_n|$ होगी यदि $\{p_n\}$ प्रमेय 1 के अनुसार हो एवं प्रतिबन्ध (2·2) पूरी होती हो।

इन दोनों प्रमेयों के निम्नलिखित विशेष रूप दर्शनीय हैं।

उपप्रमेय 1

श्रेणी $\Sigma\, m_n A_n$ संकलनीय $|c, 1|$ है, यदि प्रतिबन्ध (2·1) और (2·2) पूरे है।

उपप्रमेय 2

श्रेणी $\Sigma \, \frac{m_n \cdot \log n}{n} \cdot A_n$ संकलनीय $|N, \frac{1}{n+1}|$ है, यदि दशाएँ (2·1) और (2·2) मान्य हो।

उपप्रमेय 3

श्रेणी $\Sigma m_n A_n$ संकलनीय $|c, 1|$ होगी बशर्ते दशा (2·2) और $\Sigma \dfrac{m_n \log n}{n} < \infty$ मान्य हो।

उपप्रमेय 4

श्रेणी $\Sigma m_n A_n$ संकलनीय $\left|N, \dfrac{1}{n+1}\right|$ होगी बशर्ते दशाएँ (2·2) और $\Sigma m_n < \infty$ मान्य हो।

हमें अपने प्रमेयों (1, 2) को सिद्ध करने के लिए निम्न प्रमेयिकाओं की आवश्यकता है।

प्रमेयिका 1

प्रतिबन्ध (2·2) मान्य होने पर

$$\sum_{v=1}^{n} v \cdot A_v(x) = O(n \log n) \tag{3·1}$$

प्रमाण

$$T_n(x) \equiv \sum_{1}^{n} k\, A_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{1}^{n} k \cos\,(t-x)\, k \cdot dt$$

अत:

$$T_n(x) - f(x) = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \phi(u) \left(\frac{\sin nu/2}{\sin u/2}\right)^2 . du + \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(u) \frac{\sin (n+1/2)u}{\sin u/2} \cdot du$$

$$= O(n \log n).$$

प्रमेयिका 2

माना Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जहाँ

$$\sum_{1}^{n} k a_k = O(n \log n), \tag{3·2}$$

तब यदि $\{m_n\}$ प्रतिबन्ध (2·1) पूरा करता हो और $\{p_n\}$ प्रमेय 1 मे वर्णित अनुक्रम हो तो श्रेणी $\Sigma \dfrac{m_n P_n A_n}{n}$, संकलनीय $|N, p_n|$ होगी।

प्रमाण

मेहरोत्रा [1] की ही तरह सरल करने पर और प्रतिबन्ध (2·1) के सम्प्रयोग से प्रमेयिका सिद्ध हो जाती है।

प्रमेयिका 3

माना Σa_n कोई अनन्त श्रेणी है, जिसके द्वारा

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = O(n \log n) \tag{3·2}$$

प्रतिबन्ध मान्य है। तब श्रेणी $\Sigma\, m_n\, a_n$ संकलनीय $|N, p_n|$ है। यदि प्रतिबन्ध (2·4) मान्य हो और $\{p_n\}$ साध्य 2 मे वर्णित अनुक्रम हो।

प्रमाण

माना $\{t_n\}$ श्रेणी $\Sigma\, m_n\, a_n$ का नारलुण्ड माध्य है तब

$$t_n - t_{n-1} = \sum_{v=0}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_n} - \frac{P_{v-1}}{P_{n-1}}\right) a_{n-v} \,.\, m_{n-v}$$

$$= \frac{1}{P_n\, P_{n-1}} \sum_{0}^{n-1} P_n(p_{n-k-1} - p_n)\, m_{k+1}\, a_{k+1}$$

$$+ \frac{1}{P_n\, P_{n-1}} \sum_{0}^{n-1} p_n(P_n - P_{n-k-1})\, m_{k+1} \,.\, a_{k+1}$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 \text{ (माना)}$$

अब एबेल रूपांतरण की सहायता से सरल करने पर

$$\Sigma_1 = O\left(\frac{1}{P_{n\ 1}}\right) \sum_{k=0}^{n-2} |p_{n-k-1} - p_{n-k-2}| \quad \frac{m_{n+1}}{k+1} |B_{k+1}|$$

$$+ O\ \left(\frac{1}{P_{n-1}}\right) \sum_{k=0}^{n-2} (p_{n-k-2} - p_{n-k-1})\ \triangle m_{k+1} \cdot |B_{k+1}|$$

$$+ O\left(\frac{m_n \log n}{P_n}\right) \text{ जहाँ } \quad B_{k+1} = \sum^{n} (k+1) a_{k+1}$$

इसे प्राप्त करने के लिए हम निम्न सम्बन्ध का ध्यान रखते हैं :

$$p_{n-k-1} - p_n \leqslant (k+1)\ (p_{n-k-1} - p_{n-k}) \leqslant (k+1)\ p_{n-k-2} - p_{n-k-1})$$

और $\qquad (k+1)\, p_{k+1} \leqslant P_{k+1}$

अब माना $\Sigma_1 = O[M_1] + O[M_2] + O\left(\frac{m_n \log n}{P_n}\right)$

किन्तु $\sum_{2}^{\infty} |M_2| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{k=2}^{n-2} (p_{n-k-2} - p_{n-k-1}) \triangle m_{k+1} \cdot (k+1) \log (k+1)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \triangle m_{k+1} \cdot (k+1) \log (k+1) \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{(p_{n-k-2} - p_{n-k-2})}{P_{n-1}}$$

$$= O\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) \triangle m_{k+1} \cdot \log (k+1)}{P_{k+1}}\right]$$

$= O(1)$, प्रमेयिका की दशानुसार यह सत्य है [3]

इसी प्रकार अन्य भागों को सरल करते हुए हम पाते हैं कि $\Sigma |t_n - t_{n-1}| < \infty$ और प्रमेयिका की उपलब्धि हो जाती है।

प्रमेय 1 का प्रमाण

प्रमेय 1 की उपपत्ति प्रमेयिका 1 और 2 से पूर्ण होती है।

प्रमेय 2 का प्रमाण

प्रमेय 2 की उपपत्ति प्रमेयिका 1 और 3 से पूर्ण हो जाती है।

4. इस अनुभाग में हम फूरिए श्रेणी की और सम्बद्ध फूरिए श्रेणी (Conjugate Fourier Series) की नारलुण्ड परम संकलनीयता का कुछ और विश्लेषण चाहेंगे। इस टिप्पणी में फूरिए श्रेणी उस फलन से सम्बन्धित है जो प्रखण्ड $(0, 2\pi)$ में लेबेस्क अनुकलनीय हैं। यदि S_n और S_n' क्रमशः फूरिए श्रेणी और सम्बद्ध फूरिए श्रेणी के nवें आंशिक योग हों तो,

$$S_n = O(\log n) \tag{4·1}$$

$$S_n' = O(\log n) \tag{4·2}$$

प्रायः सभी बिन्दुओं के लिए जो प्रखण्ड $(0, 2\pi)$ में है, सत्य है।[2] इस प्रकार प्रतिबन्ध (3·1) पूरा हो जाता है और प्रमेय 1 तथा 2 का निम्नवत् रूप हो जाता है।

प्रमेय 3

प्रतिबन्ध (2.1) मान्य होने पर श्रेणी (2.3) प्रखण्ड $(0, 2\pi)$ के प्रायः सभी बिन्दुओं पर संकलनीय $|N, p_n|$ है।

प्रमेय 4

प्रतिबन्ध (2.4) मान्य होने पर श्रेणी (2.5) प्रखण्ड $(0, 2\pi)$ के प्रायः सभी बिन्दुओं पर संकलनीय $|N, p_n|$ है।

प्रमेय 3 तथा 4 में वर्णित श्रेणी ΣA_n के स्थान पर सम्बद्ध फूरिए श्रेणी के सामान्य पद B_n को प्रयुक्त किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० घनश्याम पाण्डेय का आभारी है जो इस शोध में प्रेरक रहे हैं।

निर्देश

1. मेहरोत्रा, एन० डी०, **प्रोसी० जापान अकादमी**, 1965, **41**, 45-51.
2. रोगोसिंस्की, डब्ल्यू० डब्ल्यू० Fourier Series **कैम्ब्रिज**, 1968
3. यादव, सरजू प्रसाद, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1974, 38, 329-335.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April, 1977, Pages 153-155

कार्डिया आब्लिका की जड़ों का रासायनिक परीक्षण

सन्तोष कुमार श्रीवास्तव, मुहम्मद सुल्तान तथा जे० एस० चौहान
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मार्च 4, 1976]

सारांश

कार्डिया आब्लिका की जड़ों से पांच यौगिक निकाले गये। उनमें से एक का वर्णन किया गया है, जिसे β- सीटोस्टेराल के रूप में पहचाना गया है।

Abstract

Chemical examination of the roots of cordia obliqua. *By* S. K. Srivastava, M. Sultan and J. S. Chauhan, Department of Chemistry, University of Allahabad.

Five compounds were isolated from the root of cordia obliqua. The present communication deals with the description of one of them which was characterized as β-sitosterol.

कार्डिया आब्लिका बोरेगिनेसी कुल का सदस्य है। हिन्दी में इसे लसोड़ा के नाम से जाना जाता है। यह एक मध्यम आकार का पौधा है जिसकी शाखायें अरोमिल; तना हल्का भूरा, मुलायम, अन्त: काष्ठ रहित; पत्तियां अछिन्न अथवा एकल श्वदंत; फूल छोटा; फल मीठा होता है। इसके विभिन्न भाग ओषधि के रूप में प्रयुक्त हुये हैं।

प्राप्य साहित्य देखने पर ज्ञात हुआ कि कार्डिया आब्लिका की जड़ों पर पहले काम नहीं हुआ है।

पौधे की उष्ण कटिबन्धीय वनों से प्राप्त होने वाली कुछ जातियों पर कार्य किया गया है।[1-3] तिवारी तथा सहयोगियों ने इस पौधे के बीजों पर हुये कार्य का वर्णन किया है।[4]

प्रयोगात्मक

कार्डिया आब्लिका की 10 कि०ग्रा० सूखी, चूर्णित जड़ों को एक 10 लीटर वाले गोल पेंदी के फ्लास्क में ऐल्कोहल के साथ 15 दिन तक 8 घण्टे प्रतिदिन विद्युत जलऊष्मक पर पश्चवाहित करके

निष्कर्षित किया गया। निस्यंदित गरम निष्कर्ष से ठंडा होने पर श्वेत क्रिस्टलीय यौगिक मिला जिसे निस्यन्दन द्वारा अलग कर लिया गया। निस्यन्द को इसके आयतन के आधे भाग तक सान्द्रित किया गया और 2 दिन तक एक प्रशीतित्र में रखा गया। पहले की भाँति एक और श्वेत पदार्थ प्राप्त हुआ। दोनों श्वेत पदार्थों को मिला दिया गया और उसका अध्ययन किया जा रहा है।

निस्यन्द को यथेष्ट सान्द्रित करके आसुत जल में डालने पर दो प्रभाज प्राप्त हुए—1. जल अविलेय तथा 2. जल विलेय। जल-अविलेय प्रभाज को हेक्सेन के साथ दो-तीन दिन तक पश्चवाहित किया गया। इसको गरम अवस्था में ही निस्यन्दित करने से एक अवशेष तथा एक हेक्सेन विलेय प्रभाज मिले। हेक्सेन विलेय प्रभाज को सान्द्रित करके, प्रशीतित्र में 2 दिन तक रखने पर श्वेत पदार्थ प्राप्त हुआ। इसे क्लोरोफार्म : बेन्जीन (1: 1v/v) से क्रिस्टलित करने पर प्राप्त पदार्थ सिलिका जेल जी तथा पत्र वर्णलेखन के प्रति समांग पाया गया।

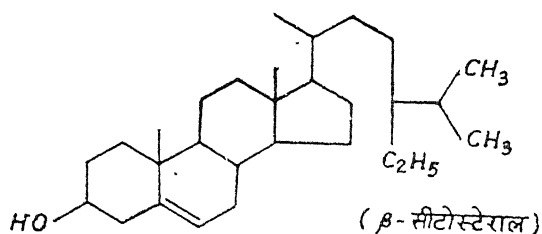
शुद्ध पदार्थों का रासायनिक परीक्षण

तत्वों के विश्लेषण तथा यौगिक के अणुभार निश्चयन से पदार्थ का अणु सूत्र $C_{29}H_{50}O$ प्राप्त हुआ।

इसका विशिष्ट ध्रुवण घूर्ण $\left[\alpha\right]_D^{25} = -30.8°$ (क्लोरोफार्म में) और एक स्टेराल व्युत्पन्न की सभी लाक्षणिक धनात्मक रंग अभिक्रियायें दी। [5-13] टेट्रानाइट्रो मेथेन के साथ धनात्मक परीक्षण से ओलिफिनीय बन्ध की उपस्थिति प्रदर्शित हुई।

यौगिक ने एक मोनो-ऐसीटेट, गलनांक 126-127°, अणुसूत्र $H_{31}H_{52}O_2$, $[\alpha]_D^{25} = -39.°4$ (क्लोरोफार्म में) तथा एक मोनो बेन्जोयेट, गलनांक 141-142° अणुसूत्र $C_{36}H_{52}O_2$ $[\alpha]_D^{25} = -14.2$ (क्लोरोफार्म में) बनाये, जिससे प्रदर्शित हुआ कि आक्सीजन एक ऐल्कोहल समूह के रूप में है।

अवरक्त स्पेक्ट्रम (KBr में) 3440, 2950, 2880, 1650, 1470, 1390, 1305, 1268, 1060, 1025, 955, 835 तथा 800 से० मी० पर शिखर प्रदर्शित किये। ये सभी शिखर β-सीटोस्टेराल [14] जैसी संरचना के सूचक हैं।

CH_3 CH_3 C_2H_5 HO

(β- सीटोस्टेराल)

β-सीटोस्टेराल के प्रभावी नमूने के साथ सह वर्णलेखन तथा मिश्रित गलनांक द्वारा यह प्रदर्शित हुआ कि यह यौगिक भी β-सीटोस्टेराल ही है। इसकी पुष्टि इससे भी हुई कि प्राप्त यौगिक तथा β-सीटोस्टेराल के प्रामाणिक नमूने के अवरक्त स्पेक्ट्रम एक ही प्रकार के थे।

निर्देश

1. इन्स· आफ पेपर केमि एप्पलिटान विस, **फारेस्ट प्रोडक्ट्स रिसर्च सोसा० रिप्रिन्ट नं०** 134, 17 (पृ०), 1951, **टाप्पी 34**, 185-(1957).
2. इन्स आफ पेपर केमि एप्पिलिटान विस, **फारेस्ट प्रोडक्ट्स रिसर्च सोसा०**, 1952, **3**, 1237-47
3. इन्स आफ पेपर केमि० एप्पलिटान विस, **फारेस्ट प्रोडक्ट्स रिसर्च सोसा०**, 1952, **3** 145-47
4. तिवारी, आर० डी०, श्रीवास्तव के० सी०, शुक्ला एस० तथा बाजपेयी, आर० के०, **प्लांटा मेडि०** 1967, **15**(3), 240-4
5. सालकोवस्की, ई०, **होपी सोलर्स** 2, 1908, **57**, 521
6. लीबरमान, सी०, **बर० ड्च० केस० जेंस०**, 1885, 1804
7. नोलर, सी० आर०, स्मिथ, आर० ए०, हरिस, जी० एच० तथा वाकर, जे० डब्ल्यू०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1942, **64**, 3047
8. शुगाज्यु, **केमि० जीग०** 1900, **24**, 542,
9. ब्राइस कार्नी, सी० एच० और ग्रीनर, एम०, **फार्म एसीटा हेलू**, 1953, **28**, 139
10. रुजिका, एल०, लीविग, एस०, **ऐन० केमि०** 1929, **25**, 471
11. फीसर एल० ई०, The Chemistry of Natural Products relected to Phenanthrone, **राइनहोल्ड पब्लिशिंग कारपोरेशन, न्यूयार्क** 1937
12. रोजेनहाइन, **बायो केमि० ज०**, 1929, **23**, 47
13. स्टाल और जूकर, बी० Modern Methods of Plant Analysis **पीच० के०, और ट्रेसी, एम० यू० द्वारा संपादित स्प्रिन्गर बेरलाग, बर्लिन**, 64, 1955
14. हेलिबार्न, आई० और बनकेरी, एच० एम० Dictionary of organic elements 1946, **10**, 361

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April 1977, Pages 157-165

उच्च ऐल्केनों का आन्तरिक दाब

विजय कुमार शाह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जून 16, 1976]

सारांश

अरैखिक पैरामीटर (B/A) तथा समउष्मीय संपीड्यता (β_s) का प्रयोग करके द्रवीय उच्च ऐल्केनों (हेप्टेन, आक्टेन, नोनेन, डोडेकेन एवं हेक्साडेकेन) के लिए आन्तरिक दाब (P_i) की गणना विभिन्न दाबों एवं तापों पर की गई। P_i का मान ताप बढ़ाने से घटता है एवं दाब बढ़ाने से बढ़ता है। —CH_2- समूह की वृद्धि से इन द्रवों के आन्तरिक दाब में वृद्धि होती है।

Abstract

Integral pressure of higher alkanes. *By* Vijai Kumar Shah, Department of Chemistry, University of Allahabad.

The internal pressure (P_i) of five higher alkanes namely, heptane octane, nonane, dodecane and hexadecane has been computed using adiabatic compressibility (β_s) and nonlinearity parameter (B/A) as a function of temperature and pressure. The value of P_i is found to decrease with increasing pressure. Introduction of—CH_2—group increases the value of P_i for these alkanes.

द्रवीय अवस्था के निकट सिद्धान्तों में आन्तरिक-दाब का ज्ञान अत्यन्त महत्वपूर्ण सिद्ध हुआ है। आन्तरिक दाब जो कि आकर्षण तथा प्रतिकर्षण बलों के परिणाम के बराबर होता है, द्रव संरचना, अन्तराण्विक बलों, सोनोरासायनिक अभिक्रियाओं इत्यादि के उल्लेख में बहुत उपयोगी पाया गया है। सर्वप्रथम हिल्डेब्रैन्ड तथा स्काट [1, 2] ने आन्तरिक-दाब का परिमापन उष्मगतिकी सम्बन्धों के आधार पर किया। इन वैज्ञानिकों ने विभिन्न द्रवों एवं द्रवीय मिश्रणों के लिये आन्तरिक दाब का विस्तृत अध्ययन किया। इन के अध्ययन में आन्तरिक ऊर्जा एवं आण्विक आयतन के सम्बन्ध पर विशेष प्रकाश डाला गया। तदुपरान्त अन्य वैज्ञानिकों [3-6] ने आन्तरिक दाब का अध्ययन किया और इसको द्रवीय अवस्था का एक मूलभूत गुण माना। आन्तरिक दाब के आधार पर द्रवों में PVT मापों के परिणाम इस प्रकार

लेखाचित्र द्वारा प्रस्तुत करना संभव है कि अन्तरआण्विक आकर्षण एवं प्रतिकर्षण प्रभाव सन्तुलित रहें तथा विभिन्न द्रवों के गुणों का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सके। हाल ही में बार्टन (Barton)[7] ने अपने विस्तृत उल्लेख में आन्तरिक दाब को द्रवीय अवस्था के एक मूलभूत गुण का प्रतिरूप दिया है। इस लेख में आन्तरिक दाब का सम्बन्ध कुछ अन्य महत्वपूर्ण उष्मगतिकी फलकों, जैसे एन्ट्रापी, मोलर आन्तरिक ऊर्जा, संसंजन ऊर्जा घनत्व (Cohesive energy density) इत्यादि के साथ उल्लेखित किया गया है। उपर्युक्त सभी फलकों का सम्बन्ध द्रव संरचना से है। रॉवलिन्सन[8] ने भी अपनी पुस्तक में बहुत से द्रवों के लिए आन्तरिक दाब की सूची प्रस्तुत की तथा इसके आधार पर अनेक महत्वपूर्ण परिणाम निकाले हैं। सन् 1963 में बर्कोविट्ज एवं श्रीवास्तव[9] ने आन्तरिक दाब एवं कर्णातीत तरंग वेग में एक सम्बन्ध निकाला जिससे उनके द्वारा कुछ द्रवों एवं द्रवीय मिश्रणों के आन्तरिक दाब की गणना की गई। परन्तु इनकी विधि में आन्तरिक दाब निकालने के लिये द्रव के मोलर वर्तन (Molar refraction) एवं एक स्थिरांक की आवश्यकता पड़ती है। कॉलिन्स तथा उसके सहयोगियों[10, 11] ने कुछ द्रवों के लिये आन्तरिक दाब की गणना ध्वनि वेग के उपयोग से की।

ध्वनि वेग विधि से द्रवों के आन्तरिक दाब का परिमापन बहुत यथार्थता से किया जा सकता है। बर्कोविट्ज तथा श्रीवास्तव[9] की विधि में आन्तरिक दाब का निकटतम मान ही प्राप्त होता है तथा इनकी विधि में बहुत सी परिकल्पनाएँ हैं। ध्वनि वेग की व्यावहारिक विधि निम्न सूत्र पर आधारित है—

$$P_i = \frac{\alpha T}{\beta_T} - P \tag{1}$$

जहाँ α उष्मीय प्रसार गुणांक, T परमताप, β_T समतापीय संपीड्यता एवं P वाह्य दाब है। समतापीय संपीड्यता β_T की गणना सम्मानित सम्बन्धों के उपयोग से ध्वनिवेग द्वारा की जाती है। इसमें हमको द्रव के उष्मीय प्रसार गुणांक की आवश्यकता पड़ती है। कभी-कभी विभिन्न दाबों एवं तापों पर α का मान उपलब्ध नहीं होता। प्रस्तुत शोध लेख में हमने एक बिल्कुल भिन्न सम्बन्ध द्वारा आन्तरिक दाब का परिमापन किया है। उच्च ऐल्केनों के लिए हमने विभिन्न दाबों एवं तापों पर इस विधि द्वारा आन्तरिक दाब की गणन की है।

सिद्धान्त

विभिन्न प्रकार के अरैखिक प्रभाव का अध्ययन जो कि साधारण ध्वनि में रैखिकता के विचलन के कारण होते हैं, हाल में बहुत रुचिकर सिद्ध हुआ है। अरैखिक पैरामीटर का अध्ययन सर्वप्रथम बेयर (Beyer) तथा उनके सहयोगियों[12, 13] ने किया तथा इसका विस्तृत शोध अध्ययन अन्य वैज्ञानिकों[14, 16] द्वारा किया गया। अरैखिक पैरामीटर के मान द्वार हमें द्रवों के भौतिक धर्मों (Physical attributes) जैसे आन्तरिक दाब, अन्तरआण्विक अन्तराल इत्यादि का ज्ञान प्राप्त हो सकता है। अरैखिक पैरामीटर निम्न समउष्मीय द्रवीय अवस्था के समीकरण से परिभाषित होता है

$$p-p_0=A\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\right)+B/2\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\right)^2+C/6\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\right)^3+\cdots\cdots \quad (2)$$

जहाँ गुणक A, B, C, निम्नलिखित समीकरणों द्वारा परिभाषित होते हैं ।

$$A=\rho_0\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S\right]\rho=\rho_0=c_0^2$$

$$B=\rho_0^2\left[\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_S\right]\rho=\rho_0=2\rho_0^2\ c_0^3\ \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_S$$

$$C=\rho_0^3\left[\left(\frac{\partial^3 p}{\partial \rho^3}\right)_S\right]\rho=\rho_0$$

जहाँ c_0 ध्वनि का वेग है।

अनुपात (B/A) एक द्रव का अरैखिक व्यवहार प्रदर्शित करता है जिसे निम्न समीकण द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है।

$$(B/A)=\frac{\rho_0}{c_0^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{S,\ \rho=\rho_0}=2\rho_0 c_0\ \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{S,\ \rho=\rho_0} \quad (3)$$

जो कि पुनः सरल उष्मगतिकीय सम्बन्धों की सहायता से निम्नलिखित रूप में प्रकट किया जा सकता है ।

$$(B/A)=2\rho_0 c_0\ \left[\left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_p\right]_{\rho=\rho_0}+\frac{2cT\alpha}{c_p}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_p\right]_{\rho=\rho_0} \quad (4)$$

इस प्रकार (B/A) का अनुमापन उपर्युक्त सम्बन्ध द्वारा ध्वनि के वेग एवं अन्य उष्मगतिकीय गुणों के उपयोग द्वारा किया जा सकता है । आन्तरिक दाब P_i की गणना निम्न व्यंजक द्वारा की जा सकती है ।

$$P_i=\frac{\rho_0 c_0^2}{\left(\frac{B}{A}+1\right)} \quad (5)$$

गणना विधि

प्रस्तुत अध्ययन में हमने हैप्टेन, ऑक्टेन, नौनेन, डौडेकेन, एवं हैक्साडेकेने के आन्तरिक दाबों की गणना विभिन्न तापों एवं दाबों पर की है । इसके लिये समीकरण (4) तथा (5) का उपयोग किया है । इन द्रवों के लिये ध्वनिवेग तथा समउष्मीय संपीड्यता के आंकडे बॉइल हॉवर [18] के शोध लेख से लिये

गये हैं। इन्हीं आँकड़ों का प्रयोग करके जैन एवं पाण्डे[19] तथा सिंह एवं प्रकाश [20] ने अरैखिक पैरामीटर की गणना इन द्रवों के लिये की है। (B/A) के इन मानों का उपयोग हमने आन्तरिक दाब निकालने में किया है।

परिणाम तथा विवेचना

गणना के परिणाम सारिणी 1 में प्रस्तुत किये गये हैं। हेप्टेन, आक्टेन, नोनेन डोडेकेन एवं हेक्साडेकेन द्रवों के लिये आन्तरिक दाब P_i के मान विभिन्न दाबों एवं तापों पर दिये गये हैं। हेप्टेन आक्टेन, नोनेन तथा डोडेकेन के लिये 0,20,40 एवं 60 डिग्री से० ताप तथा 0,200,400 एवं 1000 बार दाब पर P_i के मान की गणना की गई। हेक्साडेकेन के लिये 30, 40, 60 एवं 80 डिग्री से० ताप तथा उपर्युक्त दाब पर P_i की गणना की गई। सारिणी 1 में दिये गये परिणाम से यह विदित है कि उपर्युक्त पाँचों द्रवों के लिए आन्तरिक दाब का मान ताप बढ़ाने से घटता जाता है। परन्तु दाब का प्रभाव विपरीत है। दाब बढ़ाने से आन्तरिक दाब में प्रायः सभी द्रवों के लिये वृद्धि होती है। ऐसा अनुमान किया जाता है कि बहुत अधिक दाब पर प्राय: आन्तरिक दाब का मान कम होने लगता है। ताप बढ़ाने से द्रव के अणुओं के बीच की दूरी बढ़ती जाती है जिसके फलस्वरूप आकर्षण बल का प्रभाव बढ़ता जाता है जिससे आन्तरिक दाब कम होता है। प्रतिकर्षण बल का प्रभाव कम होता जाता है। ताप बढ़ाने से उष्मीय ऊर्जा बढ़ती है जिसके कारण संसंजन बल कम होता जाता है। जहां तक दाब बढ़ने का प्रश्न है ऐसी स्थति में द्रव के अणु एक दूसरे के निकट आते जाते हैं जिससे प्रतिकर्षण बल का प्रभाव बढ़ता जाता है। बहुत उच्च दाब पर संसंजन बल का प्रभाव द्रव में बाह्य दाब के प्रभाव से कम हो जाता है अतः आन्तरिक दाब।

सारिणी 1 से यह भी स्पष्ट है कि प्रत्येक ताप एवं दाब पर आन्तरिक दाब की वृद्धि का निम्न क्रम है।

सारिणी 1

विभिन्न तापों एवं दाबों पर उच्च ऐल्केनों के आन्तरिक दाब

ऐल्केनों के नाम	दाब (बार)	ताप (° से०)	B/A	β_s (मेगा बार)	$P_i \times 10^{-2}$ (बार)
हेप्टेन	0	0	10.26	92.6	1216.0
		20	10.16	110.0	1014.0
		40	9.98	131.7	833.9
		60	9.80	189.5	677.0
	200	0	9.76	75.3	1429.0
		20	9.52	86.4	1217.0

ऐल्केनों के नाम	दाब (बार)	ताप (°से०)	B/A	β_s (मेगा बार)	$P_i \times 10^{-2}$ (बार)
		40	9.34	99.4	1040.0
		60	9.18	114.4	889.6
	400	0	8.35	64.1	1458.0
		20	8.05	72.1	1255.0
		40	7.94	81.1	1103.0
		60	7.72	90.9	959.2
	1000	0	8.15	45.6	2006.0
		20	7.95	49.8	1797.0
		40	7.78	54.0	1626.0
		60	7.62	58.4	1476.0
आक्टेन	0	0	10.42	85.1	1342.0
		20	10.34	100.0	1134.0
		40	10.18	118.2	945.4
		60	9.48	140.8	744.4
	200	0	9·70	70.3	1760.0
		20	9.69	80.1	1337.0
		40	9.55	91.4	1154.0
		60	9.43	104.5	998.0
	400	0	8.36	60.5	1547.0
		20	8.28	67.6	1373.0
		40	7.93	75.6	1181.0
		60	7.83	84.4	1047.0
	1000	0	8.20	43.8	2100.0
		20	7.96	47.4	1890.0
		40	7.92	51.5	1732.0
		60	7.79	55.5	1584.0

ऐल्केनों के नाम	दाब (बार)	ताप (° से०)	B/A	β_s (मेगा बार)	$P_i \times 10^{-2}$ (बार)
नौनेन	0	0	10.38	79.4	1433.0
		20	10.35	92.5	1228.0
		40	10.27	108.2	1041.0
		60	10.05	127.6	865.8
	200	0	9.70	66.4	1612.0
		20	9.47	75.3	1380.0
		40	9.54	85.3	1236.0
		60	9.58	97.0	1080.0
	400	0	8.35	57.6	1626.0
		20	8.31	64.2	1450.0
		40	8.25	71.4	1297.0
		60	7.00	79.5	1007.0
	1000	0	8.41	42.3	2225.0
		20	8.14	45.7	2000.0
		40	7.90	49.2	1809.0
		60	7.73	53.3	1563.0
डौडेकेन	0	0	10.18	69.0	1619.0
		20	10.41	79.2	1450.0
		40	10.20	91.3	1227.0
		60	10.16	105.5	1058.0
	200	0	9.94	58.9	1858.0
		20	9.86	66.2	1641.0
		40	9.80	74.4	1452.0
		60	9.45	83.8	1248.0
	400	0	8.57	51.8	1848.0
		20	8.41	57.3	1643.0
		40	8.26	63.6	1455.0
		60	8.17	70.2	1306.0

ऐल्केनों के नाम	दाब (बार)	ताप (° से०)	B/A	β_s (मेगा बार)	$P_i \times 10^{-2}$ (बार)
	1000	0	8.37	—	—
		20	8.25	41.9	2208.0
		40	8.12	45.3	2013.0
		60	8.05	48.6	1862.0
हैक्साडेकेन	0	30	10.61	74.9	1550.0
		40	10.34	80.0	1418.0
		60	9.61	91.5	1160.0
		80	8.34	104.6	893.0
	200	30	10.02	63.2	1744.0
		40	9.93	66.9	1634.0
		60	9.36	74.6	1389.0
		80	9.18	83.3	1222.0
	400	30	10.79	35.0	2144.0
		40	9.87	57.9	1835.0
		60	8.47	63.6	1489.0
		80	8.31	69.8	1334.0
	1000	60	9.06	45.2	2225.0
		80	8.14	48.5	1885.0

अतः हम यह देखते हैं कि जैसे-जैसे हम हेप्टेन से हैक्साडेकेन की ओर अग्रसरित होते हैं P_i का मान बढ़ता जाता है। जैसा कि पूर्व अध्ययन से यह विदित है कि आन्तरिक बल द्रवीय रचना का एक प्रतीक है। अतः वर्तमान अध्ययन के परिणामों से यह प्रतीत होता है कि उच्च ऐल्केनों की संरचना से इसका कुछ संबंध हो सकता है। हम यह देखते हैं कि हेप्टेन से हैक्साडेकेन तक जाने में $—CH_2$ समूह का संकलन होता है जिसके फलस्वरूप आन्तरिक दाब में वृद्धि होती होती है। इस विषय पर विस्तृत शोध कार्य की आवश्यकता है जिससे कुछ सामान्य परिणाम निकाले जा सकें।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डा० जे० डी० पाण्डे, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय का आभारी हूँ जिन्होंने इस में रुचि ली।

निर्देश

1. हिल्डेब्रैन्ड, जे० एच० तथा स्कॉट, आर० एल० "**सौल्यूबिलिटी आफ नॉन इलेक्ट्रोलाइट्स, तृतीय संस्करण, रीनहोल्ड, न्यूयार्क** 1950
2. हिल्डेब्रैन्ड, जे० एच० तथा स्कॉट, आर० एल०, **रेगुलर सोल्यूशन्स, प्रेन्टिसहाल, एन्गलवुड क्लिफ्स** 1962
3. हिल्डेब्रैन्ड, जे० एच० तथा स्मिथ, ई० बी०, **जर्नल ऑफ केमिकल फिजिक्स**, 1959, **31**, 145
4. डनलप, आर० डी० तथा स्कॉट, आर० एल०, **जर्नल ऑफ फिजिकल केमिस्ट्री**, 1962, **66**, 631
5. बियानकी, यू० फ्रगाबियो, जी० तथा टर्टूरो, ए०, **जर्नल ऑफ फिजिकल केमिस्ट्री**, 1965, **69**, 4392
6. हेवार्ड, आर० एन०, **ट्रान्स० फराडे० सोसा०**, 1966, **62**, 828, **जर्नल ऑफ फिजिकल केमिस्ट्री**, 1968, **72**, 1842
7. बार्टन, ए० एफ० एम० "इन्टरनल प्रेशर ए फन्डामेन्टल लिक्विड प्रॉपर्टी" **जर्नल आफ केमिकल एजूकेशन**, 1926, **48**, 156
8. रावलिन्सन, जे० एस० "लिक्विड एन्ड लिक्विड मिक्स्चर्स", 1959
9. वर्कोविट्ज एन० तथा श्रीवास्तव एस० सी०, **कनेडियन जर्नल केमिस्ट्री**, 1963, **41**, 1787
10. कॉलिन्स, एफ० सी०, ब्रान्ड डब्ल्यू० तथा नविदि एम० एच०, **जर्नल आफ केमिकल फिजिक्स**, 1962, **25**, 581.
11. कॉलिन्स, एफ० सी० तथा नविदि एम० एच०, **जर्नल ऑफ केमिकल फिजिक्स**, 1954, **22** 1254
12. बेयर, आर० टी०, **जर्नल एकाउस्ट० सोसाइटी ऑफ अमेरिका**, 1960, **32**, 719
13. कोपेन्स ए० बी०, बेयर, आर० टी०, सेडन, एम० बी०, डोनह्यू जे०, गुपिन एफ०, हुडसन आर० डी० तथा टाउनसेन्ड, सी०, **जर्नल ऑफ एकाउस्ट० सोसा० ऑफ अमेरिका**,, 1965, **38**, 797
14. कॉर, एस० के०, सिंह, बी० के० तथा देवरानी, एस० सी०, **एकुस्टिका**, 1972, **26**, 160
15. कॉर, एस० के०, अवस्थी, ओ० एन० तथा आर० प्रसाद, **जाई० फिजि० शेमी० (लिपिजेग)** 1972, **250**, 311.

16. हेगेलबर्ग, एम० पी०, **जर्नल एकाउस्ट० सोसा० अमे०**, 1970, **158**, 158

17. सेक्लवास्क्या कोर्डी, वी० पी०, **सोवियत फि० एकाउस्ट०**, 1963, **9**, 82

18. बॉयूल हॉवर, जे० डब्ल्यू० एस०, **फिजिका** 1967, **34**, 484

19. पाण्डे, जे० डी०, जैन, आर० पी० तथा ठाकुर के० पी०, **जा० फुर० फिजिक० शेमी० (फ्रेंकफुर्ट)** 1975, **94**, 211

20. प्रकाश, एस०, कॉर, एस० के० तथा सिंह, सी० एल०, **एकुस्टिका**, 1973

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April 1977, Pages 167-171

दाल तथा तेलहनी फसलों के बीजों से पृथक किये गये कुछ बीज-गलक कवक

दीनानाथ शुक्ल
तथा
सोमेश्वर नाथ भार्गव
वनस्पति विज्ञान विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अक्टूबर 18, 1976]

सारांश

विभिन्न स्थानों से **फैसियोलस मुंगो, फैसियोलस आरुअस, केजानस केजान, साइसर एरीटिनम, लेन्स इसकुलेन्टस, पाइसम सटाइवम, लाइनम यूसीटेटिसिमम, सिसेमम इन्डीकम, गुइजोटिया एबीसीनिका, रिसीनस कम्यूनिस, ग्लाइसीन मैक्स, हेलियन्थस एन्न्यूयस, ब्रैसिका नाइग्रा, इरुका सटाइवा** तथा **कारथेमस टिंक्टोरियस** के बीज इकट्ठे किये गए। बीजोढ कवकों को पृथक करने के लिये सोख्ता तथा अगार प्लेट विधियाँ काम में लायी गयीं। दाल तथा तेलहनी बीजों से पृथक किये गये कवकों की परजीविता का परीक्षण किया गया, जिसमें से बहुत से कवक बीज-गलक सिद्ध हुये।

Abstract.

Some seeed-rot fungi isolated from pulses and oil crop seeds. *By* D.N Shukla and S. N. Bhargava, Department of Botany, University of Allahabad, Allahabad.

Seed samples of *Phaseolus mungo*, *Phaseolus aureus*, *Cajanus cajan*, *Cicer arietinum, Lens esculentus*, *Pisum sativum*, Linum *usitatisimum*, *Guizotia abyssinica*, *Ricinus communis*, *Glycine max*, *Helianthus annuus*, *Brassica nigra*, *Eruca sativa* and *Carthamus tinctorius* were collected from different places. Blotter aud agar plate procedures were used for detection of seed-borne fungi.

Pathogenicty tests were made with fungi isolated from pulses and oil crop seeds and a number of fungi were recorded as seed-rot fungi.

सारिणी 1

दालवाली तथा तेलहनी फसलों के बीजों से पृथक किये गये 'बीज-गलन' करने वाले बीजोढ कवकों के नाम एवं उनसे हानि

फसल	बीजों का अंकुरण %	कवकों से प्रभावित बीजों का %	बीजों से पृथक किये गये बीज-गलन करने वाले कवकों के नाम	बीज गलन करने वाले कवकों से हानि %
1	2	3	4	5
उर्द (**फैसियोलस मुंगो** एल०)	80	26	**फ्यूजेरियम सोलानी** (मार्ट०) सैक और मैक्रो. **फोमिना फैसियोलिना** (तासी) ग्वाइड **कर्बुलेरिया ल्युनाटा** (वाकर) बोइडजिन	5
मूंग (**फैसियोलस आरुअस** रोक्सब०)	85	23	**फ्यूजेरियम सोलानी** (मार्ट०) सैक और मैक्रो. **फोमिना फैसियोलिना** (तासी) ग्वाइड, **कर्बुलेरिया ल्युनाटा** (वाकर) बोइडजिन	12
अरहर (**केजानस केजान** मिल०)	96	16	**एस्परजिलस फ्लेवस** लिंक **एस्परजिलस नाइगर** वान टाइघेम	6
चना (**साइसर एरीटिनम** एल०)	100	5	**फ्यूजेरियम** सप०	2

मसूर (लेन्स स्कुलेन्टस मोन्य)	56	66	एस्परजिलस नाइगर वान टाइघेम राइजोपस स्टोलोनोफर (इरेम्ब इक्स एफ० आर०) लिन्ड	36
मटर (पाइसम सटाइवम एल०)	67	26	एस्परजिलस फ्लेवस लिंक	16
अलसी (लाइनम यूसीटेटिसिमम एल०)	88	25	एस्परजिलस फ्लेवस लिंक, फ्यूजेरियम सप०	12
तिल (सिसेमम इन्डीकम एस०)	78	20	फ्यूजेरियम सोलानी (मार्ट०) सैक	5
काला तिल (गुइजोटिया एबीसीनिका कास)	91	26	मैक्रोफोमिना फैसियोलिना (तासी) ग्वाइड	5
रेंड़ी (रिसीनस कम्यूनिस एल०)	76	28	एस्परजिलस टेरियस थाम, कीटोनियम आरकुयेटम राय एवम तिवारी	3
सोयाबीन (ग्लाइसीन मैक्स एल०)	86	26	राइजोपस स्टोलोनीफर (इरेम्ब इक्स एफ आर० लिंड फ़्यूजेरियम इक्वीसेटाई (काडी) सैक पेनीसीलियम सप०	6
सूरजमुखी (हेलिएन्थस एन्यूयस एल०)	100	3	फ्यूजेरियम स० प०	1
काली सरसों (ब्रैसिका नाइग्रा कोच०)	100	2	कीटोनियम ग्लोबोसम कुन्जे इक्सफर	2

दाल तथा तेलहनी फसलें बीजोढ कवकों द्वारा जनित व्याधियों से भयंकर रूप से प्रभावित होती हैं। ये व्याधिजन (Pathogen) या तो बीजों के अन्दर (अन्तः-बीजोढ) या बीजों के बाहर (वाह्य-बीजोढ) उपस्थित रहते हैं। बीजोढ कवक बीजों को सड़ाने के अतिरिक्त उसमें कुछ ऐसे विषैले रसायनों को पैदा कर देते हैं जो न केवल पुनः बोने के लिये अनुपयुक्त होते हैं, बल्कि उन्हें भोजन के रूप में उपयोग में लाने वाले प्राणियों की मृत्यु भी हो जाती है।

हमारे देश में दाल तथा तेलहनी फसलों के बीजोढ कवकों पर जिन वैज्ञानिकों ने शोधकार्य किये हैं उनमें जैन तथा पटेल [1], लम्बट तथा उनके सहयोगी [2], ललितकुमारी तथा उनके सहयोगी [3], कदियन तथा सूर्यनारायण [4], रामनाथ तथा लम्बट [5], खरे तथा उनके सहयोगी [6], तथा अग्रवाल और सिंह[7] के नाम विशेष उल्लेखनीय हैं।

प्रस्तुत शोध-प्रपत्र में विभिन्न दाल तथा तेलहनी फसलों के बीज-गलक कवकों का उल्लेख किया गया है।

प्रयोगात्मक

उर्द (**फैसियोलस मुंगो** एल०), मूंग (**फैसियोलस आरुअस** रोक्सब०), अरहर (**केजानस केजान** मिल सप), मटर (**पाइसम सटाइवम** एल०), अलसी (**लाइनम यूसीटेटिसिमम** एल०), तिल (**सीसेमम इन्डीकम** एल०), कालातिल (**गुइजोटिया एबीसीनिका** कास), रेंडी (**रिसीनस कम्यूनिस** एल०), सोयाबीन (**ग्लाइसीन मैक्स** (एल०) मर०), सूर्यमुखी (हेलि**एन्थस एन्न्यूस** एल०), काली सरसों (**ब्रैसिका नाइग्रा** कोच०), सेहुंवा (**इरूका सटाइवा** मिल०) तथा कुसुम (**कारथेमस टिंक्टोरियस** एल०) के बीज भारतीय कृषि-अनुसंधान संस्थान, नयी दिल्ली, गोविन्द वल्लभ पन्त कृषि-विश्वविद्यालय, पन्तनगर (नैनीताल), इलाहाबाद कृषि महाविद्यालय, नैनी (इलाहाबाद) तथा इलाहाबाद के समीप के बाजारों एवं कृषकों से इकट्ठे किये गये।

बीजोढ कवकों को पृथक करने के लिये सोख्ता तथा अगर प्लेट विधियां काम में लाई गयीं। बीजों को प्रयोगशाला में लाया गया और एक ही प्रकार के बीजों को मिला-मिलाकर उनके अलग अलग मिश्रित ढेरे बना लिये गये। पेट्रीप्लेटें अंधेरे में $25 \pm 2°$ ताप पर 7 से 10 दिन तक रखी गयीं। अन्तःबीजोढ कवकों को पृथक करने के लिये बीजों को 0.1 प्रतिशत मरक्यूरिक क्लोराइड के घोल में दो मिनिट तक डाल कर तथा उसके बाद जीवाणु विहीन आसुत जल से धोकर पेट्रीप्लेटों में इन्क्यूबेट किया गया। पृथक किये गये कवकों को अस्थाना और हाकर माध्यम पर उनकी परजीविता सिद्ध करने के लिये रखा गया।

बीजोढ कवकों की परजीविता सिद्ध करने के लिये उन्हें उनकी दालवाली तथा तेलहनी फसलों के बीजों पर अन्तःक्रमित कर दिया गया। बीजों को अन्तः क्रमित करने की दो विधियां अपनायी गयीं। एक तो बीजों को कवक-जीवाणुओं के घोल में डुबोकर तथा दूसरी जीवाणुविहीन मिट्टी में मक्के का चूर्ण डालकर तथा उसमें उसकी जलधारण करने की क्षमता के अनुसार जल डालकर कवकों को अन्तः क्रमिक कर दिया गया। इसके बाद उसमें बीजों को 0.1 प्रतिशत मरक्यूरिक क्लोराइड घोल में डुबोकर

तथा जीवाणुविहीन ग्रासुत जल से धोकर बो दिया गया। परजीवी बीजोढ कवकों को, जो अंकुरण क्षमता नष्ट कर देते हैं, अथवा जमे बीज के नवोद्भिदों के लिये घातक सिद्ध हुए हैं, उन्हें सारणी 1 में प्रदर्शित किया गया है।

विवेचना

सारणी 1 में दालवाली तथा तेलहनी फसलों के बीजों से पृथक किये गये 'बीज गलन' करने वाले कवकों के नाम तथा उनसे होने वाली हानि का प्रतिशत दिया गया है। यह देखा गया है कि एक ही बीज पर कई कवक पाये गये। इस प्रकार विभिन्न बीजों से कवकों के 9 वंश तथा उनकी कुल 20 जातियां पृथक की गयीं। **फ्यूजेरियम, अल्टरनेरियम** तथा **कर्वुलेरिया** की कुछ जातियां अन्तःबीजोढ पायी गयीं। **फ्यूजेरियम** की जातियां अधिकांश बीजों के गलन का कारण बनीं किन्तु इनके द्वारा नष्ट किये गये बीजों का प्रतिशत **एस्परजिलस** तथा **राइजोपस** की जातियों द्वारा नष्ट किये गये बीजों के प्रतिशत से कम रहा। इस प्रकार **एस्परजिलस** तथा **राइजोपस** सर्वश्रेष्ठ बीज-गलककवक सिद्ध हुये। बीजों में अंकुरण प्रतिशत की कमी, बीजों की अपूर्ण परिपक्वता और उस पर पाये जाने वाले कवकों के प्रभावों के कारण होती है। कुछ अंकुरित बीज भी कवकों द्वारा भीषण रूप से प्रभावित थे। उन बीजों पर पाये गये कवक उनके नवोद्भिदों की वृद्धि में अवरोधक सिद्ध हुये।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डा० ए० जोन्स, निदेशक, कामनवेल्थ माइक्रोलाजिकल इन्स्टीट्यूट, क्यू, यू० के०, को विभिन्न प्रकार के बीजोढ कवकों को पहचानने के लिये तथा वनस्पति विज्ञान विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय के अध्यक्ष प्रो० डी० डी० पन्त के कृतज्ञ हैं जिन्होंने शोधकार्य की उचित सुविधाएँ प्रदान कीं। प्रथम लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का आर्थिक सहायता प्रदान करने हेतु आभारी है।

निर्देश

1. जैन, जे० पी० तथा पटेल, पी० एन०, **इन्डियन फाइटोपैथोलाजी**, 1969, **22**, 209-213
2. लैम्बट, ए० के०, रायचौधरी, एस० पी०, लेले, वी० सी० तथा नाथ, आर० पी०, **इन्डियन**
3. ललितकुमारी, डी०, गोविन्दा स्वामी, सी० वी० तथा विद्याशेखरन, पी०, **मद्रास एग्री० जर्न० एबस्ट्रैक्ट** 1970, **57**, 27
4. कदियन, ओ० पी० तथा सूर्यनारायण, डी०, **इन्डियन फाइटोपैथोलाजी**, 1971, **24**, 487-490; **फइटोपैथोलाजी** 1969, **22**, 327-330
5. रामनाथ तथा लैम्वट, ए० के०, **इन्डियन फाइटोपैथोलाजी** 1971, **24**, 189-192
6. खरे, एम० एन०, मिश्रा, आर० पी०, कुमार एस० एम० तथा चन्द जे० एन०, **इन्डियन फाइटोपैथोलाजी**, 1972, **25**, 69-75
7. अग्रवाल, वी० के० तथा सिंह, ओ० पी०, **इन्डियन फाइटोपैथोलाजी**, 1974, **27**, 240-242

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April 1977, Pages, 173-181

दो चरों वाले H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी

वाई० एन० प्रसाद तथा ए० सिद्दीकी

सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी,

बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—जून 9, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो मूलभूत समाकलों का मान ज्ञात किया गया है जिससे कौल द्वारा प्रयुक्त समाकलों का सार्वीकरण होता है।

Abstract

Fourier series for H-function of two variables. *By* Y. N. Prasad and A. Siddiqui, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper we have evaluated two basic integrals which generalize the integrals used by Kaul [4]. We have further used them to evaluate four integrals involving H-function of two variables. These integrals have been used to establish the Fourier series for the generalized function. The results obtained recently by Kaul [4] are the particular cases of our results. Also the results obtained by Mac Robert ([7] and [6]), Keservani [5], Bajpai [2], Parashar [9] and Shah [10] can be deduced from our results on specializing the parameters.

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में आये द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल को दो चरों वाले H-फलन के रूप में सम्बोधित किया जावेगा। इसे निम्नवत् परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा।

$$H(x, y) \equiv \left[\begin{array}{c|c} \binom{m_1,\ n_1}{p_1,\ q_1} & \begin{array}{l} \{(a_{p_1}\ \alpha_{p_1},\ A_{p_1})\} \\ \{(b_{q_1},\ \beta_{q_1},\ B_{q_1})\} \end{array} \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} & \begin{array}{l} \{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\} \end{array} \\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3} & \begin{array}{l} \{(e_{p_3},\ E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3},\ F_{q_3})\} \end{array} \end{array} \middle| \ x,\ y \right] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s,\ t)\theta_1(s)\theta_2(t) x^s y^t \ ds dt$$

जहाँ

$$\phi(s,\ t) = \frac{\prod_{j=1}^{m1} \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t) \prod_{j=4}^{n1} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q1} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t) \prod_{j=n_1+1}^{p1} \Gamma(a_j - \alpha_j s - A_j t)}$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m2} \Gamma(d_j - \delta_j s) \prod_{j=1}^{n2} \Gamma(1 - c_j + \gamma_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q2} \Gamma(1 - d_j + \delta_j s) \prod_{j=n_2+1}^{q2} \Gamma(c_j - \gamma_j s)}$$

तथा $\theta_2(t)$ को प्राचल $(e_j, E_j), (f_j, F_j)$ के पदों में अनुरूपत: परिभाषित किया जावेगा। x तथा y शून्य नहीं हैं तथा रिक्त गुणनफल इकाई मान लिया गया है। अनृणपूर्णाङ्क p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3; m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3 ऐसे हैं कि $0 \leqslant n_1 \leqslant p_1$, $0 \leqslant n_2 \leqslant p_2$; $0 \leqslant n_3 \leqslant p_3$; $0 \leqslant m_1 \leqslant q_1$, $0 \leqslant m_2 \leqslant q_2$; $0 \leqslant m_3 \leqslant q_3$. ग्रीक अक्षर $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, तथा A, B, E, F अक्षर सभी धन मात्रायें हैं।

यदि कंटूर L_1 S-तल पर हो और अपने लूपों समेत $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण रहे जिससे आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त हुआ जा सके कि $\Gamma(d_j - \delta_j s)$ जहाँ $(j=1, 2, \ldots, m_2)$ तथा $\Gamma(b_j - \rho_j s - \beta_j t), (j=1, 2, \ldots, m_1)$ के पोल कंपूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t), (j=1, 2, \ldots, n_1)$, $\Gamma(1-c_j+\gamma_j s), (j=1, 2, \ldots, n_2)$ के पोल बाईं ओर पड़ेंगे। इसी प्रकार कंटूर L_2 t-तल पर है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त रहा जा सके कि $\Gamma(b_j - \rho_j s - B_j t), (j=1, 2, \ldots, \ldots, m_1)$ तथा $\Gamma(f_j - F_j t), (j=1, 2, \ldots, m_3)$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t), (j=1, 2, \ldots, n_1), \Gamma(1-e_j+E_j t), (j=1, 2, \ldots, n_3)$ के पोल बाईं ओर पड़ेंगे।

इस प्रपत्र में हम निम्नांकित संकेतनों का उपयोग यह दिखाने के लिये करेंगे कि ... द्वारा प्रदर्शित प्राचल वे ही हैं जो (1·1) में $H(x, y)$ के हैं।

$$H\left[\begin{matrix} \binom{m_1, n_1}{p_1, q_1} & \begin{matrix}\{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\end{matrix} \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \end{matrix} \middle| \, x, y \right]$$

इसी प्रकार से निम्नवत संकेतनों के लिये भी

$$H\left[\begin{matrix} \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} & \begin{matrix}\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}\end{matrix} \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \end{matrix} \middle| \, x, y \right] \text{ तथा, } H\left[\begin{matrix} \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \binom{m_3, n_3}{p_3, q_3} & \begin{matrix}\{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{matrix} \end{matrix} \middle| \, x, y \right]$$

संकेत $\{(a_{p1}, \alpha_{p1}, A_{p1})\}$ से प्राचलों के समुच्चय $(a_1, \alpha_1, A_{p1}), (a_2, \alpha_2, A_2)\ldots(a_{p1}, \alpha_{p1}, A_{p1})$ का बोध कराया गया है। $H(x, y)$ दो चरों वाले H-फलन के लिये आया है जिसे (1·1) में $m_1=0$ रखकर प्राप्त किया जाता है।

प्राचलों के अन्य प्रतिबन्ध दो चरों वाले H-फलन के ही जैसे हैं और मित्तल तथा गुप्ता [8] द्वारा विस्तार से दिये गये हैं।

2. हम निम्नांकित समाकलों की स्थापना करेंगे :

$$\text{(i)} \quad \int_0^\pi \cos p\theta \, (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^2 \, \rho \, (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} \, d\theta = \frac{\Gamma(p+\rho+\frac{1}{2}) \, \Gamma(\rho_1+\frac{1}{2})}{2\Gamma(p+\rho+\rho_1+1)} \; {}_3F_2 \left[\begin{matrix}(\rho_1+\frac{1}{2}), (-p), (-p+\frac{1}{2}); \\ (-p-\rho+\frac{1}{2}), (\frac{1}{2});\end{matrix}\right]$$

बशर्ते कि $R(2\rho+1)>0 \; R(2\rho_1+1)>0$, तथा $p=0, 1, 2\ldots$

$$\text{(ii)} \quad \int \sin(2r+1)\theta \, (\cos \theta)^2\rho \, (\sin \theta)^{2\rho_1} \, d\theta = \frac{\Gamma(2r+2) \, \Gamma(r+\rho+\frac{1}{2}) \, \Gamma(\rho_1+1)}{\Gamma(r+\rho+\rho_1+\frac{3}{2}) \, \Gamma(2r+1)}$$

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}(\rho_1+1), (-r), (-r+\frac{1}{2}); \\ (-r-\rho+\frac{1}{2}, \frac{3}{2});\end{matrix} \; 1\right] \qquad (2\cdot2)$$

बशर्ते कि $R(\rho+1)>0$, $R(\rho_1+1)>0$ तथा $r=0, 1, 2, \ldots$

(iii) $\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\rho}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\rho_1} H\left[x\left\{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2h}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2h_1}, y\left\{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2k}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{2k_1}\right]d\theta$

$$=\frac{1}{\pi} H\left[\begin{pmatrix} m_1, 2+n_1 \\ 2+p_1, 1+q_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\left|\begin{matrix} (\frac{1}{2}-\rho, h, k), (\frac{1}{2}-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1} A_{p_2})\} \\ (-\rho-\rho_1, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_1)\} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{matrix}\right| x, y\right] \quad (2\cdot3)$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0$, $R(2\rho_1+2h_1\alpha+2k_1\beta+1)>0$ तथा $0\leqslant\theta\Sigma\pi$

(iv) $\int_0^{\pi}\cos p\theta(\cos\frac{1}{2}\theta)^{2\rho}(\sin\frac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} H[x\{(\cos\frac{1}{2}\theta)^{2h}(\sin\frac{1}{2}\theta)\}^{2h_1},$

$y\{(\cos\frac{1}{2}\theta)^{2k}(\sin\frac{1}{2}\theta)\}^{2k_1}]d\theta$

$$=\sum_{r=0}^{p}\frac{(-p)_r(-p+\frac{1}{2})_r}{(\frac{1}{2})_r\, r!}$$

$$H\left[\begin{pmatrix} m_1, 1+n_1 \\ 2+p_1\; 1+q_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\left|\begin{matrix} (\frac{1}{2}-r-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A^{p}{}_1)\}, \\ (r-p-\rho+\frac{1}{2}, h, k) \\ (-\rho-\rho_1-p, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{matrix}\right| x, y\right] \quad (2\cdot4)$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0$, $R(2\rho_1+2h_1\alpha+2k_1\beta+1)>0$ तथा $p=0, 1, 2, \ldots$

(v) $\int_0^{\pi}\sin(2r+1)\theta(\cos\theta)^{2\rho}(\sin\theta)^{2\rho_1} H[x(\cos\theta)^{2h}(\sin\theta)\}^{2h_1},$

$y\{(\cos\theta)^{2k}(\sin\theta)\}^{2k_1}]d\theta$

$$=\sum_{n=0}^{r}\frac{(-r)_n(-r+\frac{1}{2})_n}{(\frac{3}{2})_n\, n!}(2r+1)$$

$$H\left[\begin{pmatrix} (m_1, +n_1) \\ 2+p_1, 1+q_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\left|\begin{matrix} (-\rho_1-h; h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, (-r-\rho+\frac{1}{2}, h, k) \\ (-r-\rho-\rho_1-\frac{1}{2}, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{matrix}\right| x, y\right]$$

$(2\cdot5)$

बशर्ते कि $R(\rho_1+h_1 a+k_1\beta+1)>0$ तथा $r=0, 1, 2, \ldots$

उपपत्ति :

(2·1) तथा (2.2) की उपपत्ति के लिये $\cos 2p\theta$ तथा $\sin(2r+1)\theta$ को $\cos\theta$ एवं $\sin\theta$ के घातों में प्रसारित करते हैं, प्राप्त प्रसारों को (2·1) एवं (2·2) के समाकल्य में रखते हैं, और गामा फलन की सहायता से प्रत्येक पद का मान ज्ञात करते हैं तथा निम्नांकित सूत्रों का प्रयोग करते हैं।

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2});\ \Gamma(z-r+1)=(-1)^r\frac{\Gamma(z+1)\,\Gamma(-z)}{\Gamma(-z+r)}$$

(2·3) को सिद्ध करने के लिये (2·3) में आये दो चरों वाले H-फलन के हेतु द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल को रखते हैं तथा समाकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करके गामा फलन की सहायता से आंतरिक समाकलन का मान ज्ञात करते हैं और फिर प्राप्त समाकल की विवेचना (1·1) द्वारा करते हैं। फल (2·4) तथा (2·5) की प्राप्ति इसी विधि से फल (2·1) तथा (2·2) के उपयोग द्वारा की जा सकती है। (2·1) में दिये हुये प्रतिबन्धों के फलस्वरूप समाकलन एवं संकलन के क्रम में परिवर्तन अनुमेय है।

3. इस अनुभाग में दो चरों वाले H-फलन के लिये निम्नांकित फूरियर श्रेणियों की स्थापना की जावेगी।

(i) $\{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\}^{2\rho_1} H[x\{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2h}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\}^{2h_1}, y\{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2k}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\}^{2k_1}]$

$$=\frac{1}{\pi}H\left[\begin{matrix}\binom{m_1,\ 2+n_1}{2+p_1,\ 1+q_1}\\ \cdots\quad\cdots\\ \cdots\quad\cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}-\rho, h, k), (\tfrac{1}{2}-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}\\ (-\rho-\rho_1, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_q)\}\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\end{matrix}\right| x, y\right]$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\sum_{r=0}^{p}\frac{(-p)_r\,(-p+\tfrac{1}{2})_r}{(\tfrac{1}{2})_r\,r!}\right.$$

$$H\left[\begin{matrix}\binom{m_1,\ 1+n_1}{2+p_1,\ 1+q_1}\\ \\ \\ \cdots\quad\cdots\\ \cdots\quad\cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}-r-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\},\\ (r-p-\rho+\tfrac{1}{2}, h, k)\\ (-p-\rho-\rho_1, h+h_1, k+k_1)\\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\\ \cdots\quad\cdots\\ \cdots\quad\cdots\end{matrix}\right| x, y\right]\cos p\theta \qquad (3\cdot1)$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0$, $R(2\rho_1+2h_1\alpha+2k_1\beta+1)>0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ तथा $p=0, 1, 2, \ldots$

(ii) $\{(\cos\theta)^{2\rho}(\sin\theta)^{2\rho_1}\} H[x\{(\cos\theta)^{2h}(\sin\theta)\}^{2h_1}, y\{(\cos\theta)^{2k}(\sin\theta)^{2k_1}]$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\left\{\sum_{n=0}^{r}\frac{(-r)_n(-r+\frac{1}{2})_n}{(\frac{3}{2})_n\, n!}\right.$$

$$H\left[\begin{pmatrix} m_1, 1+n_1 \\ 2+p_1, 1+q_1 \\ \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \end{pmatrix}\left|\begin{matrix}(-\rho_1-n, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1},)\}, (-r-\rho+\frac{1}{2}, h, k) \\ (-r-\rho-\rho_1-\frac{1}{2}, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \rho_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\end{matrix}\right| x, y\right]\left.\vphantom{\sum}\right\}\sin(2r+1)\theta \tag{3·2}$$

बशर्ते कि $R(\rho_1+h_1\alpha+k_1\beta+1)>0$; $0\leqslant\theta\leqslant\pi$; $r=0, 1, 2, \ldots$

उपपत्ति

(3·1) को सिद्ध करने के लिए माना कि

$$f(\theta)=(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} H[x\{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2h}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\}^{2h_1},$$

$$y\{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2k}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\}^{2k_1}] \tag{3·3}$$

$$=\tfrac{1}{2}C_0+\sum_{p=1}^{\infty}C_p\cos p\theta \tag{3·4}$$

अब (3·3) को 0 तथा π सीमाओं के बीच θ के प्रति समाकलित करने एवं फल (2·3) का उपयोग करने पर हमें C_0 प्राप्त होता है। पुनः (3·3) में दोनों ओर $\cos p\theta$ से गुणा करने, 0 से π के बीच θ के प्रति समाकलित करने, (2·4) को व्यवहृत करने एवं कोज्या फलन के लाम्बिकता गुण का उपयोग करने पर

$$C_p=\frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{p}\frac{(-p)_r(-p+\frac{1}{2})_r}{(\frac{1}{2})_r\, r!}$$

$$H\left[\begin{pmatrix} m_1, 1+n_1) \\ 2+p_1, 1+q_1 \\ \\ \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \end{pmatrix}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-r-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, \\ (r-p-\rho+\frac{1}{2}, h, k) \\ (-p-\rho-\rho_1, h+h_1\; k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\end{matrix}\right| x, y\right] \tag{3·5}$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0$, $R(2\rho_1+2h_1\alpha+2k_1\beta+1)>0$; तथा $p=0, 1, 2, \ldots$

(3·4) में C_0 तथा C_p के मान व्यवहृत करने पर हमें फूरियर श्रेणी प्राप्त होती है। इसी प्रकार फूरियर ज्या श्रेणी (3·2) फल (2·6) की सहायता से स्थापित की जा सकती है।

4. विशिष्ट दशायें

(i) यदि (2·1) में $\rho_1=0$ रखें तो हाइपरज्यामितीय फलन ${}_3F_2$ से ${}_2F_1$ में समानीत होता है। तब योगफल को ${}_2F_1(a, b, c; 1)=\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)/\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)$; $R(c-a-b)>0$ द्वारा लिखा जाता है। और आगे सरलीकरण पर यह

$$\int_0^{\pi} \cos p\theta(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\, d\theta=\Gamma(2\rho+1)/2^{2\rho}\, \Gamma(\rho\pm p+1) \tag{4·1}$$

में समानीत हो जाता है बशर्ते कि $R(\rho)>-\frac{1}{2}$, तथा $p=0, 1, 2, \ldots$ जो मैकराबर्ट[6] का ज्ञात फल है।

(ii) (2·1) में $\rho=0$ रखने पर तथा उपर्युक्त विधि से अग्रसर होने पर

$$\int_0^{\pi} \cos p\theta(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1}\, d\theta=\Gamma(2\rho_1+1)\, \Gamma(\tfrac{1}{2}\pm p)/2^{2\rho_1}\, \Gamma(\rho_1\pm p+1) \tag{4·2}$$

बशर्ते कि $R(\rho_1)>-\frac{1}{2}$, तथा $p=0, 1, 2, \ldots$ जो स्नेडान [1] द्वारा प्राप्त फल है।

(iii) $\rho=0$ तथा $\rho_1=\frac{1}{2}-\rho'$ रखने से (2·2)

$$\int_0^{\pi} \sin(2r+1)\theta\, (\sin\theta)^{1-2\rho'}\, d\theta=\Gamma(\tfrac{1}{2})\, \Gamma(\tfrac{3}{2}-\rho')\, \Gamma(\rho'+r)/\Gamma(\rho')\, \Gamma(2-\rho'+r) \tag{4·3}$$

में समानीत हो जाता है बशर्ते कि $R(3-2\rho')>0$ तथा $r=0, 1, 2, \ldots$ जो मैकराबर्ट [6] का फल है।

(iv) (2·4) में $\rho_1=h_1=k_1=0$, $m_1=0$ रखने पर तथा गामा फलन के द्विगुणन-सूत्र का प्रयोग करने पर कौल का फल [(4(2·1))], प्राप्त होता है अर्थात्

$$\int_0^{\pi} \cos p\theta(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\, H[x(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h}, y(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k}]d\theta$$

$$=2^{-2\rho}\, \pi H\left[\begin{pmatrix} 0, 1+n_1 \\ 1+p_1, 2+q_1 \end{pmatrix} \begin{array}{|l} (-2\rho, 2h, 2k), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (-\rho\pm p, h, k), \{(a_{p_1}, \beta_{p_1}, B_{p_1})\} \end{array} \Bigg| \frac{x}{4h}, \frac{y}{4^k}\right]$$
$$\begin{matrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0$ तथा $p=0, 1, 2\ldots$

(v) यदि (2·4) में $\rho_1=h_1=k_1=k=0$ और $\rho=h=k=k_1=0$, $\rho_1=-\rho'$, $h_1=-h'$ रखा जाय तो कौल [4] द्वारा दिये गये फल क्रम से प्राप्त होंगे अर्थात्

$$\int_0^{\pi} \cos p\theta(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\, H[x(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h}, y]d\theta$$

$$=2^{-2\rho}\, \pi\, H\left[\begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \binom{m_2,\ 1+n_2}{1+p_2,\ 2+q_2} \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\left|\begin{matrix} \cdots & \cdots \\ (-2\rho, 2h), \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}, (-\rho\pm p, h) \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\right| \frac{x}{4^h}, y\right]$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+1)>0$

तथा $$\int_0^{\pi} \cos p\theta\, (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\rho'}\, H[x\, (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2h'}, y)]d\theta$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2})\, H\left[\begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \binom{1+m_2,\ 1+n_2}{2+p_2,\ 2+q_2} \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\left|\begin{matrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-\rho'-p, h'), \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}, (1-\rho'+p, h') \\ (\tfrac{1}{2}-\rho', h'), \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}, (1-\rho', h') \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right| x, y\right]$$

बशर्ते कि $Re(\rho'+h'<\tfrac{1}{2}$.

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया, 1965, **31**, 536
2. बाजपेयी, एस० डी०, प्रोसी० कैम्ब्रि फिला० सोसा०, 1967, **65**, 703
3. कौल, सी० एल०, The Maths. Education, India, 1970, **4**, 40
4. वही, प्रोसी० एके० साइंस०, 1972, **75A**, 29
5. केसरवानी, आर० एन०, Composito Maths., 1966, 17, 149
6. मैकराबर्ट, टी० एम०, वही, 1961, **75**, 79
7. वही, Maths., *Z.*, 1959, **71**, 143
8. मित्तल, वी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, प्रोसी० इंडि० एके० साइंस, 1973, 75, 117.

9. पराशर, वी० पी०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०,** 1967, **63,** 1083

10. शाह, एम० एल०, **इंडियन जर्न०, प्योर एप्लाइड मैथ०,** 1971, **2,** 464

11. स्नेडान, आई० एन०, Special functions of Mathematical Physics and Chemistry **इंटरसाइंस पब्लिशर्स, न्यूयार्क,** 1956, पृ० 41

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 2, April, 1977, Pages 183-186

हाइपरज्यामितीय फलन ${}_2F_2$ वाले समाकल समीकरण के कुछ हल

एल० ए० दीक्षित
गणित विभाग, राजकीय इंजीनियरी तथा प्रौद्योगिकी महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—मार्च 21, 1976]

सारांश

हाइपरज्यामितीय फलन ${}_2F_2$ वाले एक समाकल समीकरण को हल किया गया है।

Abstract

Some general solutions of an integral equation involving hypergeometric function ${}_2F_2$. *By* L. A. Dixit, Department of Mathematics, Government College o Engineering and Technology, Raipur.

An integral equation involving hypergeometric function ${}_2F_2$ has been solved.

1. प्रस्तावना

जगेतिया[3] ने एक समाकल समीकरण का हल निकाला है जिसमें अष्टि रूप में हाइपरज्यामितीय फलन ${}_2F_2$ है। बाद में रूसिया तथा गुप्ता[2] ने समाकल समीकरण

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{b^r \; \alpha+r:}{r! \; \alpha! \; \alpha+m+r!} \int_0^t e^{(\lambda-b)t-u)} \cdot (t-u)^{\alpha+m+r}$$

$$\times {}_2F_2 \left[\begin{matrix} -n, \alpha+r+1; \\ \alpha+1, \alpha+m+r+1; \end{matrix} \; k(t-u) \right] g(u) \, du = f(t) \qquad (1 \cdot 1)$$

के चार विभिन्न रूपों में विलोमन समाकल प्रस्तुत किये हैं।

इसे प्रपत्र का उद्देश (1·1) के कुछ और हल समुपस्थित करना है। खण्डेकर[4] तथा रूसिया[6, 5] के फल इनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

2. वांछित फल

$f(t)$ का लैप्लास परिवर्त

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = F(p),\ Re\ p > 0$$

है तथा इस सम्बन्ध को सांकेतिक रूप में

$$f(t) \doteqdot F(p)$$

द्वारा व्यक्त करते हैं ।

निम्नांकित फल एर्डेल्यी के हैं [1, p. 141, 129, 175]

$$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\, du \doteqdot F_1(p)\ .\ F_2(p) \tag{2·1}$$

जहाँ $f_1(t) = F_1(p)$ तथा $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \doteqdot p^n F(p) \tag{2·2}$$

बशर्ते कि $f(o) = f'(o) = \ldots = f^{n-1}(o) = 0.$

$$e^{-at} f(t) \doteqdot F(p+a) \tag{2·3}$$

$$t^\alpha e^{\lambda t} L_n^{(\alpha)}(kt) \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{(p-k-\lambda)^n}{(p-\lambda)^{\alpha+n+1}} \tag{2·4}$$

जहाँ $Re\ \alpha > -1,\ Re\ p - \lambda > 0$

गुप्ता तथा रूसिया[2] से हमें

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{b^r\ e^{-bt}\ \alpha+r!}{r!\ \alpha!\ \alpha+m+r!}\ t^{\alpha+m+r}\ .\ {}_2F_2\left[\begin{matrix}-n,\ \alpha+r+1;\\ \alpha+1,\ \alpha+m+r+1;\end{matrix}\right] \tag{2·5}$$

$$\doteqdot (p-k)^n / p^{\alpha+n+1} (p+b)^m.$$

प्राप्त होगा

3. प्रमेय: यदि

1. $f^{2\alpha+m-\rho+2}(t)$ प्रभागशः $0 \leqslant x \leqslant x_1 < \infty$ में संतत है अतः

$$f(o) = f'(o) = \ldots = f^{2\alpha+m-\rho+1}(o) = 0$$

2. m, α तथा ρ धन पूर्णांक है जिनमें शून्य सम्मिलित है तथा λ और K संमिश्र अचर हैं ।

तो समाकल समीकरण का निम्न में से कोई एक हल होगा

$$g(t)=\frac{\overline{n+\rho-\alpha-1}\,!}{\overline{n-1}\,!}\int_0^t e^{(\lambda+k)(t-u)}\,.\,(t-u)^{\alpha-\rho}$$

$$\times L_{n+\rho-\alpha-1}^{(\alpha-\rho)}\{k(u-t)\}[(D-\lambda)^{2\alpha-\rho+2}(D-\lambda+b)^m f(t)]\,dt, \quad (3\cdot1)$$

$$g(t)=\frac{\overline{n+1}\,!}{\overline{n+\alpha-\rho+1}\,!}\int_0^t e^{(\lambda+k)(t-u)}\,.\,(t-u)^{\alpha-\rho}$$

$$\times L_{n+1}^{(\alpha-\rho)}\{k(u-t)\}[(D-\lambda)^{\alpha}(D-\lambda-k)^{\alpha+2-\rho}(D-\lambda+b)^m f(t)]\,dt, \quad (3\cdot2)$$

$$g(t)=\frac{\overline{n+\rho}\,!}{\overline{n+\alpha}\,!}\int_0^t e^{(\lambda+k)(t-u)}\,.\,(t-u)^{\alpha-\rho}$$

$$\times L_{n+\rho}^{(\alpha-\rho)}\{k(u-t)\}\,.\,[(D-\lambda)^{\alpha-\rho+1}(D-k-\lambda)^{\alpha+1}(D-\lambda+b)^m f(t)]\,dt \quad (3\cdot3)$$

बशर्ते कि (1·1) के वाम पक्ष का अस्तित्व है ।

उपपत्ति

माना कि $f(t) \doteqdot F(p)$ तथा $g(t) \doteqdot G(p)$.

(1·1) में लैप्लास परिवर्त का सम्प्रयोग करने, (2·5) का उपयोग करने तथा परिणामों को पुनः व्यवस्थित करने पर

$$G(p)=\frac{(p-\lambda)^{n+\rho-\alpha-1}\,(p-\lambda)^{2\alpha+2-\rho}}{(p-\lambda-k)^{(n+\rho-\alpha-1)+(\alpha-\rho+1)}}\,.\,(p-\lambda+b)^m F(p) \quad (3\cdot4)$$

(2·4) के परिप्रेक्ष्य में लैप्लास विलोमन से (3·1) प्राप्त होता है। इसी पथ का अनुसरण करते हुये (3·2) तथा (3·3) भी व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

उपप्रमेय: चूँकि $r=0$

1. यदि (3·1) में $\rho=\alpha$, $b=m=0$ रखें तो रूसिया[6] द्वारा विवेचित प्रमेय प्राप्त होता है।

2. $\rho=\alpha-n+1$, $\lambda=m=0$ रखने पर (3·1) से हमें खांडेकर[4] की दशा प्राप्त होती है।

3. यदि हम $\rho=\lambda=0$ मानें तो (3·3) से रूसिया का फल[5] सीधे प्राप्त हो सकता है।

प्राचलों के विशिष्टीकरण से कुछ और भी फल प्राप्त किये जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक मार्गदर्शन के लिये लेखक डा० रत्तन सिंह का तथा सुविधायें प्रदान करने के लिये कालेज के प्रिंसिपल आर० ए० देशपाण्डे का आभारी हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms· **भाग I मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954
2. गुप्ता, एच० एल० तथा रूसिया, के० सी०, J. M. A. C. T. 1973, **6**, 111
3. जागेतिया, आर० एन०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1969, **39A**, 323
4. खांडेकर, पी० आर०, J. De Mathemctiques pures et appl. 1965, **XLIV**, 195
5. रूसिया, के० सी०, Mathematic Japanicae 1966, **2(1)**
6. वही, The Mathematics student, 1969, **37**, 4-55

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages 187-193

फूरियर श्रेणी के नारलुंड माध्यों द्वारा फलन का सन्निकटन

जे० पी० पोरवाल
गणित विभाग, माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अगस्त 24, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य अपेक्षतया क्षीण तथा सरल प्रतिबन्धों के अन्तर्गत सिद्दीकी द्वारा प्राप्त परिणाम से भी उत्तम परिणाम प्राप्त करना है।

Abstract

Approximation to a function by the Nörlund means of its Fourier series. *By* J. P. Porwal, Department of Mathematics, Madhav Vigyan Mahavidyalaya, Ujjain.

The object of this paper is to obtain a better result than the result of Siddiqui[4] by imposing weaker and more simple conditions.

1. मान कि Σa_n दी हुई अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{s_n\}$ है। माना कि $\{p_n\}$ वास्तकि अथवा मिश्र अचरों का अनुक्रम है और हम

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n.$$

लिखते हैं।

अनुक्रम से अनुक्रम में रूपान्तरण अर्थात्

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \frac{p_{n-v}\, s_v}{P_n}$$

$$= \sum_{v=0}^{n} \frac{p_n\, s_{n-v}}{P_n}, \;)P_n \neq 0)$$

से अनुक्रम $\{t_n\}$ परिभाषित होता है जो अनुक्रम $\{s_n\}$, का नारलुंड माध्य है और चरों के अनुक्रम $\{p_n\}$ के उत्पन्न है। 1930 में आब्रेचकाफ[1] ने नियमितता प्रतिबन्धों को निम्न प्रकार से दिया है

(i) $\lim \frac{p_n}{P_n}=0$, ज्यों ज्यों $n\to\infty$

तथा (ii) $\sum_{k=0}^{n} |p_k|=0\,(|P_n|)\ (n\to\infty)$

यदि $\{p_n\}$ को वास्तविक तथा घन मान लें तो प्रतिबन्ध (ii) स्वतः तुष्ट हो जाता है। तब केवल (i) ही नियमितता प्रतिबन्ध शेष रहता है।

2. माना कि $f(x)$ आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और यह $(-\pi, \pi)$ में समाकलनीय (L) है। इस फलन से सम्बद्ध त्रिकोणमितीय फूरियर श्रेणी (2·1) द्वारा दी जाती है

$$f(x)\sim\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{2·1}$$

जहाँ a_n, b_n $f(x)$ के फूरियर गुणांक हैं।

इस समग्र प्रपत्र में हम

$$\phi(x, t)=\tfrac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\} \tag{2·2}$$

लिखेंगे। जहाँ तक फलन $fx \in \text{Lip}\ \alpha,\ 0<\alpha<1$ से संगत फूरियर श्रेणी का सम्बन्ध है लोरेंट्ज[2] ने निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त किया है:

प्रमेय A

यदि $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$, जहाँ $a_n\downarrow 0$, तो

क्योंकि $f(x)\in \text{Lip}\ \alpha,\ 0<\alpha<1$, तो यह आवश्यक एवं पर्याप्त होगा कि

$$a_n=0\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \tag{2·3}$$

स्पष्टतः यह वैध है क्योंकि

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx.$$

बोस[3] ने निम्नांकित रूप में इस प्रमेय का सार्वीकरण प्रस्तुत किया है।

प्रमेय B

माना कि $a_n \geqslant 0$ तथा a_n f के फूरियर ज्या अथवा कोज्या गुणांक हैं तो $f \in \text{Lip } \alpha$, $0<\alpha<1$, के लिये यदि

$$a_k = 0\,(n^{-\alpha}) \tag{2·4}$$

अथवा इसके समतुल्य

$$\sum_{k=1}^{n} k\, a_k = 0\,(n^{1-\alpha}) \tag{2·5}$$

यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि यदि $a_n \downarrow 0$ तो प्रतिबन्ध (2·3), (2·4) तथा (2·5) समतुल्य हैं।

हाल ही में सिद्दीकी [4] ने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध की है जो फ्लेट[5] के परिणाम का सार्वीकरण करता है।

प्रमेय C

माना कि $\{p_n\}$ वास्तविक संख्याओं का धन अवर्द्धमान अनुक्रम है जिससे कि

$$\int_t^{\xi} F_n(u)\, du = 0\left[\frac{P(1/t)}{n}\right],\ \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \xi \leqslant \pi \tag{2·6}$$

जहाँ

$$F_n(t) = Im\,\{e^{i(n+1/2)t} \sum_{v=0}^{\infty} P_v\, e^{-ivt}\} \tag{2·7}$$

और भी, माना कि $0<\alpha<1$, $0<\delta\leqslant\pi$.

यदि x ऐसा बिन्दु हो कि

$$\int_0^t |\, d\,\phi(\mu)\,| \leqslant At^{\alpha} \tag{2·8}$$

जहाँ $0\leqslant t \leqslant \delta$, तो

$$t_n(x) - f(x) = 0\,(n^{-\alpha}) + 0\left(\frac{1}{P_n}\right). \tag{2·9}$$

3. इस प्रपत्र का उद्देश्य निर्बल तथा सरलतर प्रतिबन्धों के प्रयोग द्वारा सिद्दीकी के फल से उत्तम परिणाम प्राप्त करना है।

हम निम्नांकित सिद्ध करेंगे :

प्रमेय

यदि

$$\psi(x, t)=\int_t^\delta |\phi(\mu)| \frac{P(1/u)}{u} du=0(1), 0<\delta\leqslant\pi \tag{3·1}$$

जहाँ $\{p_n\}$ वास्तविक संख्याओं का धन किन्तु अवर्द्धमान अनुक्रम है । तब

$$t_n(x)-f(x)=0\left(\frac{1}{P_n}\right) \tag{3·2}$$

x में एकरूप से लागू होता है ।

$p_n=\left(\frac{1}{(n+1)}\right)$ की विशिष्ट दशा में प्रतिबन्ध (3·1) प्रतिबन्ध (2·8) की अपेक्षा कम कठोर हो जाता है ।

4. इस प्रमेय की उपपत्ति निम्नांकित दो प्रमेयिकाओं पर आधारित है :

प्रमेयिका 1[6]

यदि $\{p_n\}$ एक अनृण तथा अवर्द्धमान अनुक्रम हो तो $0\leqslant a<b\leqslant\infty$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, के लिये तथा किसी n एवं a के लिये

$$\left|\sum_a^b p_k e^{i(n-k)t}\right|<P(1/t).$$

प्रमेयिका 2[7]

यदि $\{p_n\}$ एक अनृण तथा अवर्द्धमान अनुक्रम हो तो $0\leqslant t<\pi$, $0\leqslant a<b\leqslant\infty$, के लिये तथा किसी a एवं b के लिये

$$\left|\sum_a^b p_k \frac{\sin (n-k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}}\right|=0\left[\frac{P(1/t)}{t}\right]$$

5. **प्रमेय की उपपत्ति**

माना कि $S_n(x)$ द्वारा श्रेणी (2·1) का nवाँ आंशिक योग व्यक्त होता है तो यह हमें ज्ञात है कि

$$S_n(x)-(fx)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi(t) \frac{\sin (n-k+\frac{1}{2})}{\sin t/2} dt \tag{5·1}$$

क्योंकि

$$t_n(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k\, S_{n-k}(x),$$

अतः

$$t_n(x)-f(x)=\int_0^{\pi} \phi(t)\;\; N_n(t)\; dt, \tag{5·2}$$

जहाँ

$$N_n(t)=\frac{1}{\pi P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\sin\,(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin t/2} \tag{5·3}$$

हम निम्न प्रकार लिखेंगे:

$$I=\int_0^{\pi} \phi(t)\, N_n(t)\; dt$$

$$=\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right] \phi(t)\, N_n(t)\; dt,\; 0<\delta<\pi$$

$$=I_1+I_2+I_3, \text{ माना} \tag{5·4}$$

अब चूंकि $\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\delta.$

$$N_n(t)=\frac{1}{\pi P_n}\, O\left[\left|\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{\sin\,(n-k+\frac{1}{2})t}{\sin t/2}\right|\right]$$

$$=\frac{1}{\pi P_n}\, O\left[\frac{P(1/t)}{t}\right], \text{ प्रमेयिका 2 से}$$

$$=0\left[\frac{P(1/t)}{tp_n}\right] \tag{5·5}$$

अतः

$$I_2=\int_{1/n}^{\delta} \phi(u)\left\{\frac{P(1/u)}{uP_n}\right\} du$$

$$=0\left(\frac{1}{P_n}\right) \text{ प्रतिबन्ध (3·1) से} \tag{5·6}$$

पुनः रीमान-लेबेस्क प्रमेय तथा नियमितता प्रतिबन्धों से

$$I_3=0\left(\frac{1}{P_n}\right). \tag{5·7}$$

पुनः प्रतिबन्ध (3·1) अर्थात्

$$\psi(u)=\int_{1/n}^{\delta} \phi(u) \frac{P(1/u)}{u} du=0(1).$$

का अर्थ होगा

$$\Phi(t)=\int_0^t |\phi(u)| du$$

$$=0\left[\frac{t}{P(1/t)}\right] \tag{5·8}$$

माना कि $\phi(u) . P(1/u)=\psi(u)$

चूँकि

$$\Phi(t)=-\int_0^t \frac{u}{P(1/u)}\left\{\phi(u)\frac{P(1/u)}{u}\right\} du$$

$$=-\int_0^t \frac{u}{P(1/u)} \frac{\psi(u)}{u} du.$$

$$=\frac{1}{P(1/t)}\Big[-u\,\psi(u)\Big]_0^t+\int_0^t \psi(u)\ 0\left[\frac{1}{P(1/t)}\right]\left[\frac{d}{du}\frac{u}{P(1/u)}\right] du$$

$$=0\left[\frac{t}{P(1/t)}\right]+0(1)\left[\frac{t}{P(1/t)}\right].$$

$$=0\left[\frac{t}{P(1/t)}\right]$$

पुनः चूँकि $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}$, अतः

$$N_n(t)=0\,(n).$$

अतः

$$I_1=0\left[\int_0^{1/n} n \cdot \frac{t}{P(1/t)}\, dt\right]$$

$$=0\left(\frac{1}{P_n}\right). \tag{5·9}$$

(5·7), (5·8) तथा (5·9) को संयुक्त करने पर

$$I=0\left(\frac{1}{P_n}\right).$$

इससे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० जी० एस० पाण्डेय का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. आब्रेचकाफ, एन०, Rendiconti delli Reeles Academia dei Linei, Roma (6). 1930, **12,** 391-395.
2. लोरेंट्ज, जी० जी०, Mathematishe zertochrift, 1948, **51,** 135-149.
3. बास, आर० पी० जूनियर, Journal of Mathematical analysis and applications, 1967, **17**, 462-483
4. सिद्दीकी, ए० एच०, 36th Conference TMS Madurai, 1970
5. फलेट, टी० एम०, क्वार्ट० जर्न० मैथ०, 1956, 7, 87-95
6. मैक ड्ट्यू, ड्यूक मैथ० जर्न०, 1942, 9, 168-07
7. सिह, जे०, Annal. d Mathamatics, 1964, **64,** 123-133

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No 3, July, 1977, Pages 195-199

सार्वीकृत बेसिल बहुपद से सम्बद्ध सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदों से युक्त फल

के० एम० प्रधान
गणित विभाग, माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—नवम्बर 25, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में पहले सार्वीकृत बेसिल बहुपद वाले समाकल का मूल्यांकन किया गया है और फिर इसका उपयोग ऐसे समाकल को प्राप्त करने के लिये किया गया है जो सार्वीकृत बेसिल बहुपद तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद के गुणनफल से युक्त है।

Abstract

Results involving generalized hypergeometric polynomials associated with generalized Bessel polynomial. *By* K. M. Pradhan, Department of Mathematics, Madhav Science College, Ujjain

In this peper, the author proposes to evaluate first an integral involving generalized Bessel polynomial, which is then used to get the integral involving the product of the generalized Bessel polynomial and the generalized hypergeometric polynomia recently defined by Pradhan [4] in the form

$$F_n(x) = {}_{\rho+\sigma}F_{\mu+\lambda}\left[\begin{matrix}\Delta(\sigma, -n), a_1, \ldots, a_\rho; \\ \Delta(\lambda, \alpha), b_1, \ldots, b_\mu;\end{matrix} ux^\beta\right].$$

Some interesting results have also been discussed by specializing the parametrs.

1. प्रस्तावना

हाल ही में प्रधान[4] ने सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद की परिभाषा

$$F_n(x) = {}_{\rho+\sigma}F_{\mu+\lambda}\left[\begin{matrix}\Delta(\sigma, -n), a_1, \ldots, a_\rho; \\ \Delta(\lambda, \alpha), b_1, \ldots, b_\mu;\end{matrix} ux^\beta\right] \tag{1·1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{\sigma-1} \left(\frac{-n+i}{\sigma}\right)_m (a_\rho)_m\, u^m\, x^{\beta m}}{\prod_{j=0}^{\lambda-1} \left(\frac{\alpha+i}{\lambda}\right)_m (b_\mu)_m\, m!},$$

द्वारा दी है जहाँ σ, n, λ तथा α अनृण पूर्णांक हैं तथा

$$(a_\rho)_m = \prod_{i=1}^{\rho} (a_i)_m,\ (b_\mu)_m = \prod_{j=1}^{\mu} (b_j)_m,$$

और $\triangle(\sigma, -n)$ के द्वारा σ-प्राचलों के समुच्चय

$$\frac{-n}{\sigma} \cdot \frac{-n+1}{\sigma}, \ldots, \frac{-n+\sigma-1}{\sigma},$$

का बोध होता है, जब कि $\triangle(\lambda, \alpha)$ से λ-प्राचलों के समुच्चय

$$\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\alpha+1}{\lambda}, \ldots, \frac{\alpha+\lambda-1}{\lambda} \text{ का ।}$$

बहुपद (1·1) सार्वीकृत रूप में है, अतः प्राचलों को विशिष्टीकरण से कई ज्ञात बहुपद प्राप्त होते हैं ।

क्राल तथा फ़िंक[3] ने सार्वीकृत बेसिल बहुपदों को निम्नलिखित रूप मे परिभाषित किया है ।

$$y_n(a, b, x) = {}_2F_0\,(-n, n+a-1; -; -x/b). \tag{1·2}$$

जो $a=b=2$ होने पर सरल बेसिल बहुपद में समानीत हो जाता है ।

2· इस अनुभाग में पहले समाकल

$$I_1 = \int_0^1 x^{A-1} (1-x)^{B-1}\, y_n(a, b, x)\, dx \tag{2·1}$$

का मान ज्ञात किया जावेगा जहाँ $(A)>0$, $Re(B)>0$.

(1·2) के प्रयोग से $y_n(a, b, x)$ को प्रसारित करने तथा पदशः समाकलन करने पर, जो अनुमेय है,

$$I_1 = k \cdot \frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)},\ k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)_r (a+n-1)_r (-1)^r}{r!\, b^r} \tag{2·2}$$

अब निम्नांकित सामान्य समाकल का मान ज्ञात करने के लिये (2·2) का उपयोग करते हैं जो प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य है जिसमें सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद है ।

$$I=\int_0^1 x^{A-1}(1-x)^{B-1}\, y_n(a,\, b,\, x)$$

$$\times {}_{\rho+\sigma}F_{\mu+\lambda}\left[\begin{matrix}\triangle(\sigma,\, -n),\, a_1,\, \ldots,\, a_\rho; \\ \triangle(\lambda,\, a),\, b_1,\, \ldots,\, b_\mu;\end{matrix}\; ux^\delta\right] dx \qquad (2\cdot3)$$

$F_n(x)$, को प्रसारित करने, (1·1) का उपयोग करने तथा पदश: समाकलन करने पर जो वैध है, हमें

$$I=k\,.\,\frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)}$$

$$\times {}_{\rho+\sigma+\delta}F_{\mu+\lambda+\delta}\left[\begin{matrix}\triangle(\sigma,\, -n),\, \triangle(\delta,\, A+r),\, a_1,\, \ldots,\, a_\rho; \\ \triangle(\lambda,\, a),\, \triangle(\delta,\, A+B+r),\, b_1,\, \ldots,\, b_\mu;\end{matrix}\right], \qquad (2\cdot4)$$

प्राप्त होता है जहाँ $Re\,(A)>0$ $Re\,(B)>0$ तथा

$$k=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)_r\,(a+n-1)_r\,(-1)^r}{r!\,b^r}$$

यदि हम (2·4) में $a=b=2$, रखें तो यह सरल बेसिल बहुपद तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद के गुणनफल वाले एक समाकल में समानीत हो जाता है ।

3. विशिष्ट दशाएँ

जब $\sigma=u=\delta=1,\ \lambda=0,$ तो (2·4) (3·1)

$$\int_0^1 x^{A-1}(1-x)^{B-1}\, y_n(a,\, b,\, x)\; {}_{\rho+1}F_\mu\left[\begin{matrix}-n,\, a_1,\, \ldots,\, a_\rho; \\ b_1,\, \ldots,\, b_\mu;\end{matrix}\; x\right] dx$$

$$=k\,.\,\frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)}\; {}_{\rho+2}F_{\mu+1}\left[\begin{matrix}-n,\, A+r,\, a_1,\, \ldots,\, a_\rho; \\ A+B+r,\, b_1,\, \ldots,\, b_\mu;\end{matrix}\; 1\right], \qquad (3\cdot1\cdot1)$$

में समानीत हो जाता है जहाँ $Re\,(A)>0$, $Re\,(B)>0$·

(i) जब $a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2}$ तो हमें (3·1·1) से एक समाकल प्राप्त होता है जिसमें सार्वीकृत बेसिल बहुपद तथा एक सार्वीकृत सिस्टर सेलीन के बहुपद का गुणनफल रहता है ।

$$\int_0^1 x^{A-1}(1-x)^{B-1}\, y_n(a,\, b,\, x)\; {}_{\rho+1}F_\mu\left[\begin{matrix}-n,\, n+\alpha+\beta+1,\, a_2,\, \ldots,\, a_\rho; \\ 1+\alpha,\, \frac{1}{2},\, b_3,\, \ldots,\, b_\mu;\end{matrix}\; x\right] dx \qquad (3\cdot1\cdot2)$$

$$=k \cdot \frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)} \; {}_{\rho+2}F_{\mu+1} \left[\begin{matrix} -n, A+r, n+\alpha+\beta+1, a_2, \ldots, a_\rho; \\ A+B+r, 1+\alpha, \frac{1}{2}, b_3, \ldots, b_\mu; \end{matrix} 1\right],$$

जो $\alpha=\beta=0$ रखने पर सिस्टर सेलीन के बहुपद[1] से युक्त एक समाकल

$$\int_0^1 x^{A-1} (1-x)^{B-1} y_n(a, b, x) \; {}_{\rho+1}F_\mu \left[\begin{matrix} -n, n+1, a_2, \ldots, a_\rho; \\ 1, \frac{1}{2}, b_3, \ldots, b_\mu; \end{matrix} x\right] dx \qquad (3\cdot1\cdot3)$$

$$=k \cdot \frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)} \; {}_{\rho+2}F_{\mu+1} \left[\begin{matrix} -n, A+r, n+1, a_2, \ldots, a_\rho; \\ A+B+r, \frac{1}{2}, b_3, \ldots, b_\mu; \end{matrix} 1\right]$$

प्रदान करता है जहाँ $Re\,(A)>0$, $Re\,(B)>0$.

(ii) जब $\rho=\mu=2$, $a_1=n+\alpha+\beta+1$, $a_2=\rho^1$, $b_1=1+\alpha$, $b_2=\sigma^1$ तो (3·1·1) से एक समाकल प्राप्त होता है जिसमें सार्वीकृत बेसिल बहुपद एवं सार्वीकृत राइस के बहुपद[2]

$$\int_0^1 x^{A-1} (1-x^{B-1}) y_n(a, b, x) \; {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1. \rho^1; \\ 1+\alpha, \sigma^1: \end{matrix} x\right] dx \qquad (3\cdot1\cdot4)$$

$$=k \cdot \frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A \cdot B+r)} \; {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, A+r, n+\alpha+\beta+1, \rho^1; \\ A+B+r, 1+\alpha, \sigma^1; \end{matrix} 1\right],$$

का गुणनफल रहता है जो $\alpha=\beta=0$ रखने पर राइस के बहुपद वाले समाकल

$$\int_0^1 x^{A-1} (1-x)^{B-1} y_n(a, b, x) \; {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, n+1. \rho^1; \\ 1, \sigma^1; \end{matrix} x\right] dx \qquad (3\cdot1\cdot5)$$

$$=k \cdot \frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)} \; {}_4F_2 \left[\begin{matrix} -n, A+r, n+1, \rho^1; \\ A+B+r, 1. \sigma^1; \end{matrix} 1\right],$$

में समानीत होता है जहाँ $Re\,(A)>0$, $Re\,(B)>0$.

(iii) जब $\rho=\mu=1$, $a_1=n+\alpha+\beta+1$; $b_1=1+\alpha$ तो हमें सार्वीकृत बेसिल बहुपद तथा जैकोबी बहुपद

$$\int_0^1 x^{A-1} (1-x)^{B-1} y_n(a, b, x) \; {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1; \\ 1+\alpha; \end{matrix} x\right] dx \qquad (3\cdot1\cdot6)$$

$$=k \cdot \frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)} \; {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, A+r, n+\alpha+\beta+1; \\ A+B+r, 1+\alpha; \end{matrix} 1\right],$$

के गुणनफल से युक्त समाकल प्राप्त होता है जिसे प्राचलों के और अधिक विशिष्टीकरण से गेगेनबॉआर अथवा का लेगेण्ड्र बहुपदों वाले समाकलों में समानीत किया जा सकता है ।

(iv) यदि $\rho=0$, $\mu=1$, $b_1=1+\alpha$, तो सार्वीकृत बेसिल बहुपद तथा सार्वीकृत लागेर बहुपद के गुणनफल से युक्त एक समाकल प्राप्त होता है ।

$$\int_0^1 x^{A-1}(1-x)^{B-1}\, y_n(a, b, x)\, {}_1F_1[-n; 1+\alpha; x]\, dx \qquad (3\cdot1\cdot7)$$

$$=k\cdot\frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)}\, {}_2F_2[-n, A+r; A+B+r, 1+\alpha; 1],$$

जहाँ $Re\,(A)>0.\ Re\,(B)>0.$

(v) यदि $\rho=1,\ \mu=2,\ a_1=2c+n,\ b_1=c+\frac{1}{2},\ b_2=1+\beta,$ तो हमें बेसिल बहुपदों के सार्वीकरणों[5] वाला एक समाकल

$$\int_0^1 x^{A-1}(1-x)^{B-1}\, y_n(a, b, x)\, {}_2F_1\begin{bmatrix}-n, 2c+n; & x\\ c+\frac{1}{2}, 1+\beta; & \end{bmatrix} dx \qquad (3\cdot1\cdot8)$$

$$=k\cdot\frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)}\, {}_3F_3\begin{bmatrix}-n, A+r, 2c+n; & 1\\ A+B+r, c+\frac{1}{2}, 1+\beta; & \end{bmatrix},$$

प्राप्त होता है जो $c=\frac{1}{2},\ \beta=0$ होने पर बेटमैन के बहुपद $Z_n(x)$ वाले समाकल

$$\int_0^1 x^{A-1}(1-x)^{B-1}\, y_n(a, b, x)\, {}_2F_2\begin{bmatrix}-n, n+1; & x\\ 1, 1; & \end{bmatrix} dx \qquad (3\cdot1\cdot9)$$

$$=k\cdot\frac{\Gamma(A+r)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+r)}\, {}_3F_3\begin{bmatrix}-n, A+r, n+1; & 1\\ A+B+r, 1, 1; & \end{bmatrix},$$

में समानीत होता है जहाँ $Re\,(A)>0,\ Re\,(B)>0.$

$a=b=2$ रखने पर अनुभाग 3 के समस्त फल संगत समाकल प्रदान करते हैं जिनमें सरल बेसिल बहुपद से युक्त ज्ञात विशिष्ट फलन रहते हैं ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डा० आर० एल० महाजन के सुझावों के हेतु लेखक उनका आभारी है ।

निर्देश

1. फासेनमायर, सिस्टर एम० सेलीन, बुले० अमे० मैथ० सोसा०, 1947, 53. 806-812
2. खांडेकर, पी० आर०, प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया, 1964, 34 II, 157-162
3. क्राल, एच० तथा फ्रिंक, ओ०, ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1949, 65, 100-115
4. प्रधान, के० एम०, (प्रेषित)
5. रेनविले, ई० डी०, कैना० जर्न० मैथ०, 1953, 5, 104-106

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages 201-206

संक्रियात्मक फलन पर प्रमेय

वी० डी० कोराने तथा राजेन्द्र के० सक्सेना
गणित विभाग, वी० आर० इंजीनियरी कालेज, नागपुर

[प्राप्त—नवम्बर 21, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में एक प्रमेय की स्थापना की गई है जिसमें बेसिल-मेटलैंड फलन वाले एक समाकल समीकरण की तुष्टि एक फलन द्वारा होती है जो किसी फलन का द्विगुण लैप्लास परिवर्त है। निगमन के रूप में आत्म व्युत्क्रम फलन भी निर्धारित किये गये हैं।

Abstract

A Theorem on operational calculus. *By* V. D. Koranne and Rajendra K. Saxena, Department of Mathematics, V. R. College of Engineering, Nagpur.

In this paper a theorem has been established wherein an integral equation involving Bessel-Metland function is satisfied by function which is double Laplace transform of certain function. Further as a deduction self-reciprocal functions are also determined.

1. प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य निम्नलिखित प्रमेय को स्थापित करना है।

फलन $f(x, y)$ जो

$$f(p, q)=pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} \phi(s, t)\, ds\, dt \tag{1·1}$$

द्वारा निर्धारित किया जाता है समाकल समीकरण

$$f(p+b_1, q+b_2)=\mu_1\mu_2(p+b_1)(q+b_2) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1} . y^{\lambda_2}}{(x+b_1)(y+b_2)}$$

$$\times J_{\lambda_1}^{\mu_1} \{(p-c_1)x^{\mu_1}\} . J_{\lambda_2}^{\mu_2} \{(q-c_2)y^{\mu_2}\} . f(x+b_1, y+b_2)\, dx\, dy \tag{1·2}$$

की तुष्टि करता है जब फलन सम्बन्ध

$$\phi(s, t)=s^{(\lambda_1/\mu_1)-1} \cdot t^{(\lambda_2/\mu_2)-1} \cdot e^{(c_1+b_1)s+(c_2+b_2)t} \times e^{-b_1 s^{-1-\mu_1} b_2 t^{-1/\mu_2}} \cdot \phi(s^{-1/\mu_1}, t^{-1/\mu_2}) \tag{1·3}$$

सत्य हो।

यह प्रमेय निम्नांकित के लिये वैध है

(i) $\phi(x, y)=0(x^{-1+t_1}, y^{-1+t_2})$ जब x तथा y लघु हों।

(ii) $\phi(x, y)=0(x^{\eta_1} . e^{k_1 x}, y^{\eta_2} . e^{k_2 y})$ जब x तथा y दीर्घ हों।

बशर्ते कि $R(p, q)>0$; $R(\lambda_1, \lambda_2)>-1$; $R(\eta_1, \eta_2)>-1$;

$0<\mu_1<1$; $0<\mu_2<1$; $R(p-k_1, q-k_2)>0$;

$R(b_1-k_1, b_2-k_2)>0$; $R(p-c_1, q-c_2)>0$.

यह प्रमेय निम्नांकित के लिये भी सत्य है

(i) $R(b_1-k_1, b_2-k_2)=0$ बशर्ते कि $R(\lambda_1-\eta_1, \lambda_2-\eta_2)>0$

(ii) $\mu_1=\mu_2=1$ बशर्ते कि $R(\lambda_1-2\eta_1, \lambda_2-2\eta_2)<5/2$

फलन[1] $J_\lambda^\mu(x)$ को

$$J_\lambda^\mu(x)=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r!\,\Gamma(1+\lambda+\mu r)} \quad (\mu>0)$$

द्वारा परिभाषित करते हैं।

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि यदि $f(p, q) \doteqdot \phi(p(s, t)$

अर्थात्

$$f(p, q)=pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt}\, \phi(s, t)\, ds\, dt$$

तो

$$\frac{pq}{(p+b_1)(q+b_2)} f(p+b_1, q+b_2) \doteqdot e^{-b_1 s-b_2 t}\, \phi(s, t) \tag{1·4}$$

बशर्ते कि $R(p+b_1-k_1, q+b_2-k_2)>0$ [2].

पुनश्च, निगमन से

$$p^{-\lambda_1} \cdot q^{-\lambda_2} \cdot e^{(-a_1 p^{-\mu_1}) + (-a_2 q^{-\mu_2})} \doteqdot s^{\lambda_1} \cdot t^{\lambda_2} J_{\lambda_1}^{\mu_1} (a_1 s^{\mu_1}) \cdot J_{\lambda_2}^{\mu_2} (a_2 t^{\mu_2}) \qquad (1{\cdot}5)$$

बशर्ते कि $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, R(\lambda_1, \lambda_2) > -1, R(p, q) > 0.$

(1·4) तथा (1·5) सम्बन्धों में समाकल परिवर्त[3] सम्बन्धी सार्वीकृत प्रमेय का सम्प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty \int_0^\infty s^{\lambda_1 - 1} \cdot t^{-\lambda_2 - 1}(e^{-a_1 s^{-\mu_1}}) \cdot (e^{-a_2 t^{-\mu_2}}) \cdot e^{-b_1 s - b_2 t} \cdot \phi(s, t)\, ds\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1} \cdot y^{\lambda_2}}{(x+b_1)(y+b_2)} J_{\lambda_1}^{\mu_1} (a_1 x^{\mu_1}) \cdot J_{\lambda_2}^{\mu_2} (a_2 y^{\mu_2}) \cdot f(x+b_1, y+b_2)\, dx\, dy$$

बशर्ते कि $R(p, q) > 0$; $R(\eta, \eta_2) > 1$; $R(\lambda_1, \lambda_2) > -1$; $R(p-k_1, q-k_2) > 0$; $R(b_1 - k_1, b_2 - k_2) > 0$; $\mu_1 < 1$, $\mu_2 < 1$. जिसे $u = s^{-\mu_1}$, $v = t^{-\mu_2}$, $a_1 = p$, $a_2 = q$ प्रतिस्थापन के पश्चात् निम्नवत् लिखा जा सकता है:

$$pq \int_0^\infty \int_0^\infty s^{(\lambda_1/\mu_1) - 1} \cdot t^{(\lambda_2/\mu_2) - 1} \cdot e^{-ps - qt} \cdot e^{-b_1 (s)^{-1/\mu_1} - b_2 (t)^{-1/\mu_2}} \times \phi(s^{-1/\mu_1}, t^{-1/\mu_2})\, ds\, dt$$

$$= pq \mu_1 \mu_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1} \cdot y^{\lambda_2}}{(x+b_1)(y+b_2)} J_{\lambda_1}^{\mu_1} (p x^{\mu_1}) \cdot J_{\lambda_2}^{\mu_2} (q y^{\mu_2}) f(x+b_1, y+b_2)\, dx\, dy$$

अतः

$$pq^{\mu_1 \mu_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1} y^{\lambda_2}}{(x+b_1)(y+b_2)} J_{\lambda_1}^{\mu_1} (p x^{\mu_1}) \cdot J_{\lambda_2}^{\mu_2} (q y^{\mu_2}) f(x+b_1, y+b_2)\, dx\, dy$$

$$\doteqdot (s)^{\lambda_1/\mu_1 - 1} \cdot (t)^{\lambda_2/\mu_2 - 1} \cdot e^{-b_1 (s)^{-1/\mu_1} - b_2 (t)^{-1/\mu_2}} \cdot \phi(s^{-1/\mu_1}, t^{-1/\mu_2})$$

इस सम्बन्ध में नियम (1·4) का सम्प्रयोग करने पर

$$\mu_1 \mu_2 pq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1} y^{\lambda_2}}{(x+b_1)(y+b_2)} J_{\lambda_1}^{\mu_1} \{(p-c_1) x^{\mu_1}\} \cdot J_{\lambda_2}^{\mu_2} \{(q-c_2) y^{\mu_2}\} \times f(x+b_1, y+b_2)\, dx\, dy$$

$$\doteqdot e^{c_1 s + c_2 t} \cdot (s)^{\lambda_1/\mu_1 - 1} \cdot (t)^{\lambda_2/\mu_2 - 1} \cdot e^{-b_1 s^{-1/\mu_1} - b_2 t^{-1/\mu_2}} \cdot \phi(s^{-1/\mu_1}, t^{-1/\mu_2})$$

बशर्ते कि $R(\lambda_1, \lambda_2) > -1$; $R(p-c_1, q-c_2) > 0$.

यदि अब $\phi(s, t)$ से फलनक सम्बन्ध

$$e^{-b_1 s - b_2 t} \cdot \phi(s, t) = (s)^{\lambda_1/\mu_1 - 1} \cdot (t)^{\lambda_2/\mu_2 - 1} \cdot e^{c_1 s + c_2 t} \cdot e^{-b_1 s^{-1/\mu_1} - b_2 t^{-1/\mu_2}} \phi(s^{-1/\mu_1} t^{-1/\mu_2})$$

की तुष्टि हो अथवा

$$\phi(s, t)=s^{\lambda_1/\mu_1-1} . t^{\lambda_2/\mu_2-1} . e^{(c_1+b_1)s+(c_2+b_2)t} . e^{-b_1 s^{-1/\mu_1}-b_2 t^{-1/\mu_2}}\phi(s^{-1/\mu_1}, t^{-1/\mu_2}).$$

अतः लर्च प्रमेय से यह अनुगमन होता है कि

$$f(p+b_1, q+b_2)$$

$$=\mu_1\mu_2(p+b_1)(q+b_2)\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1} . y^{\lambda_2}}{(x+b_1)(y+b_2)} J_{\lambda_1}^{\mu_1}\{(p-c_1)x^{\mu_1}\} . J_{\lambda_2}^{\mu_2}\{(q-c_2)y^{\mu_2}\} \times f(x+b_1, y+b_2)$$

उदाहरण

माना कि $\phi(s, t)=e^{b_1 s+b_2 t} . s^{\nu_1-1} . t^{+\nu_2-1}$ तथा $c_1=c_2=0$

तो फलनक सम्बन्ध (1·3) की तुष्टि होगी बशर्ते कि

$$\mu_1=\frac{\lambda_1+1-\nu_1}{\nu_1}, \mu_2=\frac{\lambda_2+1-\nu_2}{\nu_2}$$

अतः $f(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ps-qt} . e^{b_1 s+b_2 t} . s^{\nu_1-1} . t^{\nu_2-1}\, ds\, dt$

$$=\frac{\Gamma\nu_1 . \Gamma\nu_2 pq}{(p-b_1)^{\nu_1} . (q-b_2)^{\nu_2}}, R(p-b_1, q-b_2)>0; R(\nu_1, \nu_2)>0$$ [2] के अनुसार

समाकल समीकरण (1·2) की तुष्टि करता है बशर्ते कि

$$R(p-b_1, q-b_2)>0; R(2\nu_1, 2\nu_1)>R(\lambda_1+1, \lambda_2+1)>R(\nu_1, \nu_2)>0$$

2. यदि $f(x, y)$ ऐसा फलन हो जो (1·1) द्वारा निर्धारित होता हो जिसमें $\phi(s, t)$ में फलनक सम्बन्ध

$$\phi(s, t)=s^{\lambda_1-1} . t^{\lambda_2-1} e^{b_1(s-1/s)+b_2(t-1/t)} . \phi\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) \quad (2·1)$$

की तुष्टि होती हो तो फलन

$$\frac{x^{\lambda_1+1/2} . y^{\lambda_2+1/2}}{(x^2+2b_1)(y^2+2b_2)} f\left(\frac{x^2}{2}+b_1, \frac{y^2}{2}+b_2\right) R\lambda_1, \lambda_2$$ होगा।

इसका अर्थ हुआ कि यह फलन $\lambda_1\lambda_2$ कोटि के हैंकेल परिवर्त के साथ आत्म-व्युत्क्रम है।

यह प्रमेय वैध है यदि

(i) $\phi(x, y)=0\,(x^{-1+\epsilon_1}, y^{-1+\epsilon_2})$ जब x तथा y लघु हों;

(ii) $\phi(x, y)=0\,(x^{\eta_1} . e^{k_1 x}\, y^{\eta_2} . e^{k_2 y})$ जब x तथा y दीर्घ हों।

बशर्ते कि

$$R(p, q)>0;\; R(\eta_1, \eta_2)>-1:\; R(\lambda_1, \lambda_3)>-1$$
$$R(\lambda_1-2\eta_1, \lambda_2-2\eta_2)>5/2;\; R(p-k_1, q-k_2)>0;$$
$$R(b_1-k_1, b_2-k_2)>0$$

चूँकि (1·3) में $\mu_1=\mu_2=1$ तथा $c_1=c_2=0$ रखने पर यह (2·1) में समानीत हो जाता है और (1·2) निम्नलिखित रूप धारण करता है

$$f(p+b_1, q+b_2)$$
$$=(p+b_1)(q+b_2)\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1} . y^{\lambda_2}}{(x+b_1)(y+b_2)}\, \overset{1}{J}_{\lambda_1}(px) . \overset{1}{J}_{\lambda_2}(qy) f(x+b_1, y+b_2)\, dx\, dy$$

अथवा

$$\frac{p^{\lambda_1/2} . q^{\lambda_2/2}}{(p+b_1)(q+b_2)} f(p+b_1, q+b_2)$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{\lambda_1/2} . y^{\lambda_2/2}}{(x+b_1)(y+b_2)} J_{\lambda_1}\{2\sqrt{px}\} . J_{\lambda_2}\{2\sqrt{qy}\} . f(x+b_1, y+b_2)\, dx\, dy$$

जिसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है:

$$\frac{u^{\lambda_1+1/2} . v^{\lambda_2+1/2}}{(u^2+2b_1)(v^2+2b_2)}\, f(\tfrac{1}{2}u^2+b_1, \tfrac{1}{2}v^2+b_2)$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \sqrt{(xy\, uv)}\, J_{\lambda_1}(ux)\, J_{\lambda_2}(vy)\, \frac{x^{\lambda_1+1/2} . y^{\lambda_2+1/2}}{(x^2+2b_1)(y^2+2b_2)} . f(\tfrac{1}{2}x^2+b_1, \tfrac{1}{2}y^2+b_2)\, dx\, dy$$

जिससे प्रदर्शित होता है कि

$$\frac{x^{\lambda_1+1/2} . y^{\lambda_2+1/2}}{(x^2+2b_1)(y\;+2b_2)} . f(\tfrac{1}{2}x^2+b_1, \tfrac{1}{2}y^2+b_2);\; R_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

चूँकि $b_1=b_2=0$ जिसका अर्थ हुआ कि

$$x^{\lambda_1-3/2} . y^{\lambda_2-3/2} . f(\tfrac{1}{2}x^2, \tfrac{1}{2}y^2);\; R_{\lambda_1, \lambda_2}$$

बशर्ते कि फलनक सम्बन्ध

$$\phi(s, t)=s^{\lambda_1-1} . t^{\lambda_2-1} . \phi\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) \text{ की तुष्टि हो।}$$

उदाहरणस्वरूप

$$\phi(s, t)=s^{\lambda_1/2-1/2} \cdot t^{\lambda_2-1/2} \cdot e^{-(a_1-b_1)s-a_1/s-(a_2-b_2)t-a_2/t}$$

से फलनक सम्बन्ध (2·1) की तुष्टि होती है और तब

$$f(p, q)=pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} \cdot s^{\lambda_1/2-1/2} \cdot t^{\lambda_2/2-1/2} \cdot e^{-(a_1-b_1)s-a/s}\, e^{-(a_2-b_2)t-a_2/t}\, ds\, dt$$

$$=2p \left(\frac{p+a_1-b_1}{a_1}\right)^{-1/4\lambda_1-1/4} \cdot 2q\left(\frac{q+a_2-b_2}{a^2}\right)^{-1/4\lambda_2-1/4}$$

$$\times k_{-1/2\lambda_1-1/2}\,[2\surd\{a_1(p+a_1-b_1))] \cdot k_{-1/2\lambda_2-1/2}\,[2\surd(a_2(q+a_2-b_2))]$$

अतः हमें एक चर के लिये वाटसन द्वारा दिये गये फल[4] जैसा ही परिणाम प्राप्त होता है ।

$$x^{\lambda_1+1/2} \cdot y^{\lambda_2+1/2} \cdot (x^2+2a_1)^{-1/4\lambda_1+1/4} \cdot (y^2+2a_2)^{-1/4\lambda_2-1/4}$$

$$\times k_{-1/2\lambda_1-1/2}\,[\surd(2a_1(x^2+2a_1))] \cdot k_{-1/2\lambda_2-1/2}\,[\surd(2a_2(y^2+2a_2))]$$

R_{λ_1, λ_2}, तुल्य है बशर्ते कि $R(\lambda_1, \lambda_2)>-1$.

निर्देश

1. राइट, ई० एम०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1935, **38**, 257-270
2. डिटकिन, वी० ए० तथा प्रुडनिकोव, ए० पी०, Operational Calculus of two Variables and its Application **पर्गमान प्रेस**, 1962
3. बोरा, एस० एल० तथा सक्सेना, आर० के०, Univ. Nac. Tuk man. Rev. Ser. A 1973, **XXIII**, 7-9
4. वाटसन, Theory of Bessel Functions. 1944

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages 207-210

हाइपरज्यामितीय श्रेणी $_5F_4$ से सम्बन्धित कुछ तत्समिकायें

वीरेन्द्र कुमार तथा बी० एम० अग्रवाल
शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—नवम्बर 21, 1976]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में हाइपरज्यामितीय श्रेणी $_5F_4$ के कुछ रूपान्तर दिये गये हैं।

Abstract

Some identities related to hyporgeometric series $_5F_4$. *By* Virendra Kumar and B. M. Agrawal, Government Science College, Gwalior.

In this note some transformation of hypergeometric series $_5F_4$ have been obtained.

1. प्रस्तावना

कार्लिज[1] ने सालसुज् प्रमेय का उपयोग कर परिणाम

$$_5F_4\left[\begin{matrix}-2n, -2n-b, -2n-c, -2n-d, -2n-e; \\ b+1, c+1, d+1, e+1\end{matrix} 1\right] \tag{1·1}$$

$$=(-1)^n \frac{2n!\,(b+c+2n+1)_n(c+e+2n+1)_n(d+e+2n+1)_n}{n!\,(b+1)_n(c+1)_n(d+1)_n(e+1)_n}$$

जबकि $b+c+d+e+5n+1=0$

प्राप्त किया। बायीं ओर की श्रेणी सुसममारित है। हमने वर्तमान शोधपत्र में डॉगल प्रमेय[2], जिसके अनुसार

$$_7F_6\left[\begin{matrix}\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, -n;\ 1 \\ \frac{\alpha}{2}, \alpha-\beta+1, \alpha-\gamma+1, \alpha-\delta+1, \alpha-\epsilon+1, \alpha+n+1\end{matrix}\right] \tag{1·2}$$

$$=\frac{(\alpha+1)_n(\alpha-\beta-\gamma+1)_n(\alpha-\gamma-\delta+1)_n(\alpha-\delta-\beta+1)_n}{(\alpha-\beta+1)_n(\alpha-\gamma+1)_n(\alpha-\delta+1)_n(\alpha-\beta-\gamma-\delta+1)_n}$$

जब कि $2\alpha=\beta+\gamma+\delta+\epsilon-n-1$, का प्रयोग कर हाइपरज्यामितीय श्रेणी ${}_5F_4$ से सम्बन्धित कुछ तत्समिकायें प्राप्त की हैं।

2. तत्समिकायें

$$2.\quad {}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n, & -2n-b, & -2n-c, & -2n-d, & -2n-e; \\ & b+1, & c+1, & d+1, & e+1\end{matrix}\; 1\right]_n \tag{2·1}$$

$$=(-1)^n\frac{2n!}{n!}\cdot\frac{(b+e+2n+1)_n(c+e+2n+1)_n(d+e+2n+1)_n}{(b+1)_n(c+1)_n(d+1)_n(e+1)_n}$$

$$-(-1)^n\frac{(n+1)_n(n+b+1)_n(n+c+1)_n(n+d+1)_n(n+e+1)_n}{n!\,(b+1)_n(c+1)_n(d+1)_n(e+1)^n}$$

जबकि $b+c+d+e+5n+1=0$.

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n, & -2n-b, & -2n-c, & -2n-d, & -2n-e; \\ & b+1, & c+1, & d+1, & e+1\end{matrix}\; 1\right] \tag{2·2}$$

$$=2\cdot{}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n, & -2n-b, & -2n-c, & -2n-d, & -2n-e; \\ & b+1, & c+1, & d+1, & e+1\end{matrix}\; 1\right]_n$$

$$+\frac{(-1)^n(n+1)_n(n+b+1)_n(n+c+1)_n(n+d+1)_n(n+e+1)_n}{n!\,(b+1)_n(c+1)_n(d+1)_n(e+1)_n}$$

3. उपपत्ति

डॉगल के प्रमेय (1·2) के वाम पक्ष में $\alpha=-2n+2h$ रखने पर

$$\sum_{\gamma=0}^{n}\frac{(-2n+2h)_\gamma(1-n+h)_\gamma(\beta)_\gamma(\gamma)_\gamma(\delta)_\gamma(\epsilon)_\gamma(-n)_\gamma}{(-n+h)_\gamma(-2n+2h-\beta+1)_\gamma(-2n+2h-\gamma+1)_\gamma(-2n+2h-\delta+)_\gamma(-2n+2h-\epsilon+1)_\gamma(-n+2h+1)_\gamma\,\gamma!}$$

$$=\sum_{\gamma=0}^{n-1}\frac{(-2n+2h)_\gamma(1-n+h)_\gamma(\beta)_\gamma(\gamma)_\gamma(\delta)_\gamma(\epsilon)_\gamma(-n)_\gamma}{(-n+h)_\gamma(-2n+2h-\beta+1)_\gamma(-2n+2h-\gamma+1)_\gamma(-2n+2h-\delta+1)_\gamma(-2n+2h-\epsilon+1)_\gamma(-n+2h+1)_\gamma\,\gamma!}$$

$$+\frac{(-2n+2h)_n(1-n+h)_n(\beta)_n(\gamma)_n(\delta)_n(\epsilon)_\gamma(-n)_n}{(-n+h)_a(-2n+2h-\beta+1)_n(-2n+2h-\gamma+1)_n(-2n+2h-\delta+1)_n(-2n+2h-\epsilon+1)_n(-n+2h+1)_n\,n!}$$

जब h शून्य को अग्रसर होता है तो यह

$$\sum_{\gamma=0}^{n-1} \frac{(-2n)_\gamma(1-n)_\gamma(\beta)_\gamma(\gamma)_\gamma(\delta)_\gamma(\epsilon)_\gamma(-n)_\gamma}{(-n)_\gamma(-2n-\beta+1)_\gamma(-2n-\gamma+1)_\gamma(-2n-\delta+1)_\gamma(-2n-\epsilon+1)_\gamma(-2n-\epsilon+1)^{\gamma}}$$

$$+\frac{(-2n)_n(\beta)_n(\gamma)_n(\delta)_n(\epsilon)_n}{2(-2n-\beta+1)_n(-2n-\gamma+1)_n(-2n-\delta+1)_n(-2n-\epsilon+1)_n\, n!}$$

$$={}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n, \beta, \gamma, \delta, \epsilon;\\ -2n-\beta+1,\ -2n-\gamma+1,\ -2n-\delta+1,\ -2n-\epsilon+1\end{matrix}; 1\right]_n$$

$$+\frac{(-2n)_n(\beta)_n(\gamma)_n(\delta)_n(\epsilon)_n}{2(-2n-\beta+1)_n(-2n-\gamma+1)_n(-2n-\delta+1)_n(-2n-\epsilon+1)_n\, n!}$$

डॉगल प्रमेय (1·2) के दक्षिण पक्ष में $\alpha=-2n$ रखने पर यह

$$\frac{(-2n+1)_n(-2n-\beta-\gamma+1)_n(-2n-\gamma-\delta+1)_n(-2n-\delta-\beta+1)_n}{(-2n-\beta+1)_n(-2n-\gamma+1)_n(-2n-\delta+1)_n(-2n-\beta-\gamma-\delta+1)_n}$$

इस प्रकार

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n, \beta, \gamma, \delta, \epsilon;\\ -2n-\beta+1,\ -2n-\gamma+1,\ -2n-\delta+1,\ -2n-\epsilon+1\end{matrix}; 1\right]_n$$

$$+\frac{(-2n)_n(\beta)_n(\gamma)_n(\delta)_n(\epsilon)_n}{2(-2n-\beta+1)_n(-2n-\gamma+1)_n(-2n-\delta+1)_n(-2n-\epsilon+1)\, n!}$$

$$=\frac{(-2n+1)_n(-2n-\beta-\gamma+1)_n(-2n-\gamma-\delta+1)_n(-2n-\delta-\beta+1)_n}{(-2n-\beta+1)_n(-2n-\gamma+1)_n(-2n-\delta+1)_n(-2n-\beta-\gamma-\delta+1)_n}$$

जबकि $\beta+\gamma+\delta+\epsilon+3n-1=0$

या, $${}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n, \beta, \gamma, \delta, \epsilon;\\ -2n-\beta+1,\ -2n-\gamma+1,\ -2n-\delta+1,\ -2n-\epsilon+1\end{matrix}; 1\right]_n$$

$$+\frac{(-2n)_n(\beta)_n(\gamma)_n(\delta)_n(\epsilon)_n}{2(-2n-\beta+1)_n(-2n-\gamma+1)_n(-2n-\delta+1)_n(-2n-\epsilon+1)_n n!}$$

$$=\frac{(-1)^n(-2n+1)_n(-2n-\delta-\epsilon+1)_n(-2n-\beta-\epsilon+1)_n\ (-2n-\gamma-\epsilon+1)_n}{(-2n-\beta+1)_n(-2n-\gamma+1)_n(-2n-\delta+1)_n(-2n-\beta-\gamma-\delta+1)_n}$$

जबकि $\beta+\gamma+\delta+\epsilon+3n-1=0$.

अब $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ को क्रमशः $-2n-b,\ -2n-c,\ -2n-d,\ -2n-e$ से स्थानान्तरित करने पर

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n,\ -2n-b,\ -2n-c,\ -2n-d,\ -2n-e\\ b+1, c+1, d+1, e+1\end{matrix}; 1\right]_n$$

$$+\frac{(-2n)_n(-2n-b)_n(-2n-c)_n(-2n-d)_n(-2n-e)_n}{2(b+1)_n(c+1)_n(d+1)_n(e+1)_n\, n!}$$

$$=\frac{(-1)^n(-2n+1)_n(2n+d+e+1)_n(2n+b+e+1)_n(2n+c+e+1)_n}{(b+1)_n(c+1)_n(d+1)_n(-n-e)_n}$$

जबकि $b+c+d+e+5n+1=0$

अथवा,

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}-2n, & -2n-b, & -2n-c, & -2n-d, & -2n-e \\ & b+1, & c+1, & d+1, & e+1\end{matrix}; 1\right]_n$$

$$=\frac{(-1)^n\, 2n!\, (2n+d+e+1)_n(2n+b+e+1)_u(2n+c+e+1)_n}{2n!\, (b+1)_n(c+1)_n(d+1)_n(e+1)_n}$$

$$-\frac{(-1)^n(n+1)_n(n+b+1)_n(n+c+1)_n(n+d+1)_n(n+e+1)_n}{2(b+1)_n(c+1)_n(d+1)^n(e+1)_n\, n!}$$

जबकि $b+c+d+e+5n+1=0$.

इस प्रकार हमें तत्समिका (2·1) प्राप्त होती है। तत्समिका (1·1) का प्रयोग करने पर हमें तत्समिका (2·2) प्राप्त होती है।

निर्देश

1. कार्लिट्ज, एल०, Rendiconti Del Seminario Matematico Della Universita Dl Padova, 1970, **XLIV**, 91-95
2. मैकराबर्ट, टी० एम०, Functions of Complex Variable **मैकमिलन एण्ड कम्पनी, लन्दन** 1962, पृ० 37

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July 1977, Pages 211-217

r चरों वाले सार्वीकृत फलन सम्बन्धी कुछ सान्त समाकल

जे० एम० एस० यादव तथा वाई० एन० प्रसाद
अनुप्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नॉलाजी
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—सितम्बर, 9, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में r चरों वाले H-फलन को परिभाषित करते हुये इसके अभिसरण के प्रतिबन्ध दिये गये हैं। इस फलन से सम्बन्धित कुछ सान्त समाकलों का मान निकाला गया है।

Abstract

Some finite integrals involving generalized function of 'r' variables. *By* J. M. S. Yadav and Y. N. Prasad, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In present paper we have defined the H-function of 'r' variables in terms of r-contour integrals and have given the conditions of its analyticity and convergence. We have further evaluated some finite integrals involving this function, which are quite general in nature and useful in solving certain boundary value problems.

1. प्रस्तावना

r चरों वाला सार्वीकृत फलन निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा।

$$H(x_r)=H\left[\begin{matrix}\binom{m,\ n}{p,\ u} & \begin{matrix}\{(a_p,\ (\alpha_{rp}))\}\\ \{b_q,\ (\beta_{rq}))\}\end{matrix}\\ \binom{(M_r),\ (N_r)}{(P_r),\ (Q_r)} & \begin{matrix}\{(c_{rpr}),\ (\gamma_{rpr})\}\\ \{(d_{rQr}),\ (\delta_{rQr})\}\end{matrix}\end{matrix}\ \middle|\ (x_r)\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^r}\int_{(Lr)} \phi(\Sigma s_k)\ \psi(s_k)\prod_{k=1}^{r}\left\{x_k^{s_k}\ (ds_k)\right\} \tag{1.1}$$

जहाँ
$$\phi(\Sigma s_k)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\sum_{k=1}^{r}\beta_{kj}\,s_k)\prod_{j=1}^{n}(1-a_j+\sum_{k=1}^{r}\alpha_{kj}\,s_k)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\sum_{k=1}^{s}\beta_{kj}\,s_k)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\sum_{k=1}^{r}\alpha_{kj}\,s_k)}$$

तथा
$$\psi(s_k)=\prod_{k=1}^{r}\left[\frac{\prod_{j=1}^{Mk}\Gamma(d_{kj}-\delta_{kj}\,s_k)\prod_{j=1}^{Nk}\Gamma(1-c_{kj}+\gamma_{kj}\,s_k)}{\prod_{j=M_k+1}^{Qk}\Gamma(1-d_{kj}+\delta_{kj}\,s_k)\prod_{j=N_k+1}^{P_k}\Gamma(c_{kj}-\gamma_{kj}\,s_k)}\right]$$

जहाँ $\prod_{k=1}^{r} ds_k=ds_1 ds_2 \ldots ds_r$

$(a_r)=a_1, a_2, \ldots a_r$

$\{(c_{rPr}), (\gamma_{rPr})\}$ के द्वारा $\{(c_{1P1}, \gamma_{1P_1})\}, \{(c_{2P_2}, \gamma_{2P_2})\}\ldots$

$\{(c_{rPr}, \gamma_{rP_r})\}$ तथा $\{(c_{1P1}, \gamma_{1P1})\}$ के द्वारा $(c_{11}, \gamma_{11}), (c_{12}, \gamma_{12}), \ldots, (c_{1P_1}\, \gamma_{1P_1})$

$\int_{(Lr)}$ के द्वारा $\int_{L_1}^{1}\int_{L_2}\cdots\int_{Lr}$ सूचित होता है जहाँ $L_1, L_2, \ldots, L_r$ संमिश्र तलों $s_1, s_2 \ldots s_r$ में कंटूर हैं, $p, P_1, P_2, \ldots P_r$, $q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$, $m, M_1, M_2, \ldots M_r$, $n, N_1, N_2, \ldots Nr$, घन पूर्णांक हैं जो निम्नांकित प्रतिबन्ध की तुष्टि करते हैं :

$$p, q\geqslant 0,\ Q_k\geqslant 0,\ 0\leqslant M_k\leqslant P_k;\ p+P_k\leqslant q+Q_k;\ k=1, 2, \ldots r$$

$$x_k\neq 0\ (k=1, 2, \ldots, r);$$

$(\alpha_i), (i=1 \ldots p); (\beta_j)\ (j=1 \ldots q); \gamma_{ij}\ (i=1 \ldots r; j=1, 2, \ldots P_r); (\delta_{ij})\ (i=1 \ldots r, j=1, 2, \ldots Q_r)$ धन संख्यायें हैं ।

$q_i(i=1 \ldots p); b_i(i=1 \ldots q); c_{ij}(i=1 \ldots r; j=1 \ldots P_r); d_{ij}\ (i=1 \ldots r; j=1 \ldots Q_r)$

संमिश्र संख्यायें हैं । कंटूर $L_k\ s_k(k=1 \ldots r)$ तल में है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आश्वस्त रहा जा सके कि

$$\Gamma(b_j-\sum_{k=1}^{r}\beta_{kj}\,s_k)\ (j=1 \ldots m) \text{ तथा } \Gamma(d_{kj}-\delta_{kj}\,s_k)\ (j=1, 2, \ldots M_k)$$

के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा

$\Gamma(1-a_j+\sum_{k=1}^{r} \alpha_{kj} s_k)$ $(j=1 \ldots n)$, एवं $\Gamma(1-c_{kj}+\gamma_{kj} s_k)$ $(j=1 \ldots N_k)$ के पोल कंटूर के बाईं ओर अवस्थित होंगे।

कंटूर समाकल (1·1) अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x_k| < \tfrac{1}{2}U_k\pi;\ (U_k>0)\ (k=1 \ldots r) \tag{1·2}$$

जहाँ

$$U_k=\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}-\sum_{j=n+1}^{p} \alpha_{kj}+\sum_{j=1}^{m} \beta_{kj}-\sum_{j=m+1}^{q} \beta_{kj}+\sum_{j=1}^{M_k} \delta_{kj}-\sum_{j=M_k+1}^{Q_k} \delta_{kj}$$
$$+\sum_{j=1}^{N_k} \gamma_{kj}-\sum_{j=N_k+1}^{P_k} \gamma_{kj} \tag{1·3}$$

(1·1) द्वारा परिभाषित r' चरों वाला H-फलन r चरों वाला वैश्लेषिक फलन (x_r) होता है यदि

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_{kj}+\sum_{j=1}^{pk} \gamma_{kj}<\sum_{j=1}^{q} \beta_{kj}+\sum_{j=1}^{Q_k} \delta_{kj}\ (k=1, 2, \ldots, r) \tag{1·4}$$

ब्राक्समा [1] का अनुसरण करने हुये यदि यह दर्शाया जा सके कि जब $m=0$, $H(x_r)=0(\,|x_k|^{\alpha' k})$ (x_r) के लघु मानों के लिये जहाँ

$$\alpha'_k=\min.\ R\left(\frac{d_{kj}}{\delta_{kj}}\right)(j=1, \ldots, M_k;\ k=1, \ldots, r) \tag{1·5}$$

जब $n=0$,

$$H(x_r)=0(\,|x_k|^{\beta' k})\ (k=1, \ldots, r)\quad (x_r) \text{ के दीर्घ मानों के लिए}$$

$$\text{जहाँ } \beta'_k=\max\ R\left(\frac{c_{kj}-1}{\gamma_{kj}}\right)(j=1, \ldots, N_k)\ (k=1, \ldots, \gamma) \tag{1·6}$$

यह रोचक बात है कि जब $\alpha_{kj}(j=1, \ldots, p)$, $\beta_{kj}(j=1, \ldots, q)$, $\gamma_{kj}(j=1, \ldots, P_r)$, δ_{kj} $(j=1, \ldots, Q_r{:}\ k=1, \ldots, r)$ में से प्रत्येक इकाई के तुल्य होता है तो (1·1) r चरों वाले G-फलन में समानीत हो जाता है जिसे गर्ग [4] ने परिभाषित किया है और जब $r=2$ तो यह दो चरों वाले H-फलन में समानीत होता है जिसका अध्ययन मित्तल तथा गुप्ता [5], राम [7], सिद्दीकी [8] इत्यादि ने किया है। जब $r=1$ तो (1·1) फाक्स [3] द्वारा परिभाषित एक चर वाले H- फलन में समानीत हो जाता है। जब $p=q=0$, तो r चरों वाला H फलन यह एक चर वाले rH फलन के गुणनफल में समानीत हो जाता है।

2. ज्ञात फल

समाकलों की उपपत्ति में निम्नांकित ज्ञात फलों का उपयोग किया जावेगा ।

यदि $2Re(\lambda)>|R(\mu)|$,

तो
$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1} \; P_\nu^\mu \; (x) \, dx=\frac{\pi(2^\mu \, \Gamma(\lambda+\frac{1}{2}u) \, \Gamma(\lambda-\frac{1}{2}u)}{[\Gamma(\lambda+\frac{1}{2}\nu+1) \, \Gamma(\lambda-\frac{1}{2}\nu) \, \Gamma(-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1)x} \quad \Gamma(-\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2})] \quad (2\cdot1)$$

यदि $R(\mu)>0, \; R(\rho)>0$,

तो
$$\int_0^p x^{\rho-1} \, (p-x)^{\mu-1} \, dx=\frac{\Gamma\rho\Gamma(\mu)}{\Gamma(\rho+\mu)} \, p^{\mu+\rho-1} \quad (2\cdot2)$$

यदि $R(\nu)>0$,

तो
$$\int_0^{1/2} \cos 2\mu\theta \; (\sin\theta)^\nu \; d\theta=\frac{\Gamma(\nu+1) \; (\mu+1/2) \; \Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}{2^{\nu+1} \, \Gamma(\frac{1}{2}\nu+\mu+1) \; \Gamma(\frac{1}{2}\nu-\mu+1)} \quad (2\cdot3)$$

यदि $R(\nu)>0$ तथा μ एक धन पूर्णाङ्क है तो
$$\int_0^{1/2} \cos 2\mu\theta \, (\cos\theta)^\nu \; d\theta=\frac{\pi\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1} \, (\frac{1}{2}\nu+\mu+1) \; \Gamma(\frac{1}{2}\nu-\mu+1)} \quad (2\cdot4)$$

यदि $R(2m+1)>0, \; R(2n+1)>0$ और $p=0, 1, 2, 3 \ldots$

तो
$$\int_0^{\pi/2} \cos 2p\theta \, (\cos\;\theta)^{2m} \, (\sin\;\theta)^{2n} \; d\theta$$
$$=\frac{\Gamma(p+m+1/2) \; \Gamma(n+1/2)}{2\Gamma(p+m+n+1)} \; {}_3F_2 \; \left[\begin{matrix} n+1/2, \; -p, -p+1/2 \\ -p, \; -m+1/2, \; 1/2 \end{matrix}\right] \quad (2\cdot5)$$

3. प्रमुख फल

हम (1·1) में परिभाषित सार्वीकृत फलन वाले पाँच समाकल स्थापित करेंगे ।

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1} \, p^\mu(x) \; H[(z_r(1-x^2)^{h_r})]dx$$
$$=\frac{\pi \; 2^\mu}{\Gamma(-1/2\mu+1/2\nu+1) \; \Gamma(-1/2\mu-1/2\nu+1/2)} \cdot$$
$$H\left[\begin{matrix} \binom{0, \; n+2}{p+2, \; q+2} \\ \binom{(M_r), \;\; (N_r)}{(P_r) \quad (Q_r)} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (1-\rho-1/2h, \, (h_r)), \, (1-\rho+1/2\mu, \, (h_r)), \, \{(a_p, \, (\alpha_{rp}))\} \\ (-\rho-1/2, \, (h_r)), \, (1+1/2\nu-\rho, \, (h_r)), \, \{(b_q, \, (\beta_{rq}))\} \\ \{(c_r, \, P_r) \, (\gamma_r \, P_r) \\ \{(d_r \, Q_r), \, (\delta_r \, Q_r) \end{matrix} \right. \; (Z_r) \right] \quad (3\cdot1)$$

बशर्ते कि $h_k \geqslant 0 \; (k=1, \ldots, r). \; R(\lambda + \sum_{k=1}^{r} h_k \, \alpha'_k) > 0,$

$|\arg Z_k| < 1/2 \, U_k \, \pi \; (k=1 \ldots r), \; U_k > 0,$

जहाँ α'_k तथा U_k को क्रमशः (1·5) तथा (1·3) द्वारा व्यक्त किया जावेगा।

$$\int_0^p x^{\rho-1} (p-x)^{\mu-1} H[(b_r x^{h_r} (p-x)^{h'_r})] dx$$

$$= p^{\mu+\rho-1} H \left[\begin{pmatrix} 0, n+2 \\ p+2, q+1 \\ (M_r), (N_r) \\ (P_r), (Q_r) \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} (1-\rho, (h_r)), (1-\mu, (h_r')), \{(a_p, (\alpha_{rp})\}\} \\ (1-\mu-\rho, (h_r+_r')), \{(b_q, (\beta_{rq}))\} \\ (\{c_r P_r), (\gamma_r P_r)\} \\ \{(d_r Q_r), (\delta_r Q_r)\} \end{matrix} \middle| (b_r p^{h_r+h'_r} \right] \quad (3\cdot2)$$

बशर्ते कि $h_k (k=1 \ldots r) \geqslant 0, \; h'_k (k=1 \ldots r) \geqslant 0, \; R(\rho + \sum_{k=1}^{r} h_k \, \alpha'_k) > 0$

$R(\mu + \sum_{k=1}^{r} h'_k \, \alpha'_k) > 0, \; |\arg b_k| < 1/2 \, U_k \, \pi \; (k=1 \ldots r)$

जहाँ α_k तथा U_k को क्रमशः समीकरण (1·5) तथा (1·3) द्वारा दिया जाता है,

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\mu\theta \, (\sin\theta)^{\nu} \, H[b_r (\sin\theta)^{h_{(r)}}$$

$$= \frac{\Gamma(1/2+\mu) \, \Gamma(1/2-\mu)}{\sqrt{\pi}}$$

$$H \left[\begin{pmatrix} 0, n+2 \\ p+2, q+3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} (M_r), (N_r) \\ (P_r), (Q_r) \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} (-1/2\nu, 1/2(h_r)), (1/2-1/2^{\nu}, 1/2(h_r) \\ \{(a_p, (\alpha_{rp}))\} \\ (-1-\nu, (h_r)), (-\mu-1/2\nu, \tfrac{1}{2}(h_r)), \\ (\mu-1/2\nu, 1/2(h_r)), \{(b_q, (\beta_{rq}))\} \\ \{c_r P_r), (\gamma_r P_r)\} \\ \{(d_r Q_r), (\delta_r Q_r)\} \end{matrix} \middle| (b_r q) \right] \quad (3\cdot3)$$

बशर्ते कि $h_k \geqslant 0 \; (k=1 \ldots r); \; R(\nu + 1 + \sum_{k=1}^{r} h_k \, \alpha'_k) > 0$

$\arg b_k| < 1/2 \, U_k \pi (k=1 \ldots r)$ जहाँ U_k तथा α'_k को क्रमशः

(1·5) तथा (1·3) द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\mu\theta\,(\cos\theta)^v\, H[(b_r \cos\theta)^{hr})]d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2^{v+1}}\, H\left[\begin{pmatrix}0,\, n+1\\ p+1,\, q+2\end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix}(M_r),\,(N_r)\\ (P_r),\ (Q_r)\end{pmatrix} \left| \begin{matrix}(-v,\,(h_r)),\,\{(a_p,\,\alpha_{rp}))\}\\ (-\mu-1/2v,\,1/2(h_r)),\ (\mu-1/2v,\\ 1/2(h_r)),\,(b_q,\,(\beta_{rq}))\}\\ \{(c_rP_r),\,(\gamma_rP_r)\}\\ \{(d_rQ_r),\,(\delta_rQ_r)\end{matrix} \right| (b_r)\right] \tag{3·4}$$

बशर्ते कि $R(v+1+\sum_{k=1}^{r} h_k\,\alpha'_k)>0$, $|\arg b_k|<1/2\, U_k\,\pi(k=1,\,\ldots\, r)\ h_k(k=1,\,\ldots\, r)\geqslant 0$;

जहाँ U_k तथा α_k (3·3) की भांति दिये जाते हैं।

$$\int_0^{\pi} \cos p\theta \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2M} \sin\frac{2}{\theta}\Big)^{2N} H\left[\left(b_r\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2h_r}\right)\right]d\theta$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+r+1/2)\,\Gamma(-p+r)\,\Gamma(-p+r+1/2)\,\Gamma(-p-m+1/2)\,\Gamma(N+1/2\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(-p)\,\Gamma(-p+1/2)\,\Gamma(-p-m+1/2+r)\,r!\,\Gamma(r+1/2)}$$

$$H\left[\begin{pmatrix}0,\, n+1\\ p+1,\, q+1\end{pmatrix} \atop \begin{pmatrix}(M_r),\,(N_r)\\ (P_r),\ (Q_r)\end{pmatrix} \left| \begin{matrix}(-1/2-p-M),\,(h_r),\,\{(a_p,\,(\alpha_{rp})\}\\ (-p-M-N,\,(h_r)),\,\{(b_q,\,(\beta_{rq})\}\\ \{(c_rP_r),\,(\gamma_rP_r)\}\\ \{(d_rQ_r),\,(\delta_rQ_r)\}\end{matrix} \right| (b_r)\right] \tag{3·5}$$

बशर्ते कि $R(2N+1)>0$, $R(2M+2\sum_{k=1}^{r} h_k\,\alpha_k+1)>0$ जहाँ $h_k>0$

$|\arg x_k| < 1/2 U_k\pi\ (k=1,\,\ldots\,,\, r)$ जहाँ U_k तथा α_k' (3·4) में दिये गये हैं।

उपपत्ति

(3·1) की उपपत्ति के लिये (Hx_r) के स्थान पर (1·1) को रखकर कंटूर रूप में बदल लें और समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{(Lr)} \phi(\Sigma s_k)\,\psi(s_k) \sum_{k=1}^{r}\left\{Z_k^{\ s_k}\,(ds_k)\right\}\left[\int_{-1}^{1}\ (1-x^2)^{\rho}+\sum_{k=1}^{r} h_k s_k - 1.\right.$$

अब हम आन्तरिक समाकल का मान (2·1) से ज्ञात करें और (1·1) के अनुसार विवेचना करें तो हमें फल (3·1) प्राप्त होगा।

अन्य फल इसी विधि से ज्ञात फलों (2·2-2·5) के उपयोग द्वारा सिद्ध किये जा सकते हैं।

विशिष्ट दशायें

प्रमुख फल में $r=2$ रखने पर हाल ही में राम[7] द्वारा दिये गये दो चरों वाले H-फलन के परिणामों को प्राप्त कर सकते हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compos. Math. **15**, 239-341
2. एर्डेल्यी, ए०, Table of Integral Transform. भाग I और II, बेटमान मैनुस्क्रिप्ट प्रोजकेट, मैकग्राहिल कं०, 1954
3. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1962, 98, 408
4. गर्ग, ओ० पी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 178-81
5. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी इंडि० एके० साइंस**, 1972, **75**, 117-125
6. रेनविले, ई० डी० "Special Function". तृतीय संस्करण मैकमिलन कं० न्यूयार्क (1965),
7. राम, एस० डी०, **पी-एच० डी० शोध प्रबंध**, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी 1974
8. सिद्दीकी, ए०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, 1975

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20. No 3, July 1977, Pages 219-222

रोगजनक स्क्लैरोस्पोरा ग्रेमिनीकोला द्वारा संक्रमित बाजरे के पौधों की पत्तियों में वाह्यत्वचीय समुच्चय

आर० पी० यादव

वनस्पति विज्ञान विभाग, श्री वार्ष्णेय कालेज, अलीगढ़

[प्राप्त—अगस्त 27, 1976]

सारांश

सहायक कोशाओं की संख्या में अनियमितायें स्वस्थ पौधों की पत्तियों की अपेक्षा अस्वस्थ पौधों की पत्तियों में अधिक होती हैं। इसी प्रकार से उनके आकार और परिमाण में भी अनियमिततायें स्वस्थ पौधों की पत्तियों की अपेक्षा संक्रमित पौधों में अधिक पाई जाती हैं।

Abstract

Study on the epidermal pattern in the pearl millet leaves infected by Sclerospora graminicola. *By* R.P. Yadav, Department of Botany, S.V. College, Aligarh.

Abnormalities in the number of subsidiary cells of the stomates are higher in the leaves of the infected plants than in the leaves of the healthy plants. Abnormalities in the shape and size of the subsidiary cells are also higher in the leaves of infected plants.

स्क्लैरोस्पोरा ग्रेमिनीकोला बाजरे में हरी बालियों वाला रोग (green ear disease) उत्पन्न करता है। वाह्यत्वचीय समुच्चय के अध्ययन के समय संक्रमित पौधों की पत्तियों में संरन्ध्रों की संरचनाओं में कुछ अनियमिततायें देखी गईं। रासायनिक अभिक्रिया के फलस्वरूप तथा बिना किसी अभिक्रिया के संरन्ध्रों के आकार तथा रचना में उत्पन्न अनियमितताओं का उल्लेख कतिपय अनुसन्धानकर्ताओं ने किया है (वेबर[8], विस्सनबौक[7], ब्राट[4], और वेबर, डैहनैल[2], इनामदार[1] और राव तथा रमय्या[6])। यादव[5] ने बाजरे की कुछ प्रजातियों में संरन्ध्रों के आकार और संरचना में विभिन्नताओं का अध्ययन किया है। शर्मा और सेन[9] ने **सोलेनम नाइग्रम** (लिन०) के संरन्ध्रों में बहुरूपता का अध्ययन किया है।

प्रयोगात्मक

सन् 1969 के फसलीय मौसम में संक्रमित तथा स्वस्थ पौधों की जड़ से पांचवीं पत्ती के टुकड़ों को फार्मलीन-ऐसीटिक-ऐल्कोहल (F.A.A.) में स्थायीकृत कर लिया गया। अपाक्ष सतह की वाह्य त्वचा का अध्ययन किया गया। अपाक्ष सतह की वाह्य त्वचा प्राप्त करने के लिये पाल, रामानुजम तथा मेनन[3] की विधि अपनायी गयी।

परिणाम तथा विवेचना

साधारणतः संरन्ध्रीय उपकरण में दो द्वार कोशिकायें एक संरन्ध्रीय द्वार को बनाती हैं तथा दो सहायक कोशिकायें सहारा प्रदान करतीं हैं। इस प्रकार साधारणतः बने संरन्ध्रीय उपकरण के साथ साथ कुछ अनियमिततायें भी होती हैं। ये अनियमिततायें संरन्ध्रों के आकार में भी हो सकती हैं या द्वार कोशिका तथा सहायक कोशिकाओं के आकार तथा संख्या में हो सकतीं हैं।

इस लेख में सहायक कोशिकाओं की संरचना में अनियमितताओं के अध्ययन का वर्णन किया गया है जोकि सहायक कोशिकाओं की संख्या के कारण था। असाधारण संरन्ध्रों में केवल एक ही सहायक कोशा थी या तीन सहायक कोशायें थीं या दो संरन्ध्र एक साथ थे और उनमें तीन सहायक कोशायें थी। कहीं कहीं पर संरन्ध्रीय द्वार में एक ही द्वार कोशिका थी या एक भी द्वार कोशिका नहीं थी। सहायक कोशाओं और द्वार कोशाओं की संख्या में देखी गई अनियमितता संक्रमित पौधों की पत्तियों में अधिक थीं (सारणी-1)।

सारणी 1

सहायक कोशाओं तथा द्वार कोशाओं की संख्या में अनियमिततायें

	अनियमितताओं के प्रकार					
प्रकार	1	2	3	4	5	योग
स्वस्थ पौधे की पत्तियाँ	0.050	0.020	—	0.010	—	0.080
संक्रमित पौधे की पत्तियाँ	0.600	0.400	0.500	0.400	0.600	2.150

1=एक सहायक कोशा वाले संरन्ध्र,

2=तीन सहायक कोश वाले संरन्ध्र,

3=दो संरन्ध्र एक साथ और उनकी तीन सहायक कोशायें,

4=संरन्ध्र में एक द्वार कोशा तथा

5=संरन्ध्र बिना द्वार कोशाओं के।

संरन्ध्रों के आकार और परिणाम में विविधता दोनों ही प्रकारों में पाई जाती है परन्तु अनियमितताओं की आवृति रोग ग्रसित पत्तियों में अधिक है (सारणी 2)।

सारणी 2

आकार तथा परिमाण के अनुसार संरन्ध्रों की आवृति

	आवृति								
	लम्बाई (M) में				चौड़ाई (M) में				
प्रकार	31-35	36-40	41-45	46-50	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45
स्वस्थ पौधे की पत्तियाँ	3	24	1	—	2	25	1	—	—
संक्रमित पौधे की पत्तियाँ	5	12	16	7	3	12	15	4	2

उपर्युक्त वर्णन से यह स्पष्ट है कि सहायक कोशाओं की संख्या में अनियमिततायें स्वस्थ पौधों की अपेक्षा संक्रमित पौधों में अधिक हैं। इसी प्रकार से पौधों में संरन्ध्रों के आकार और परिमाण का अध्ययन किया गया तो यह पता चला कि संरन्ध्रों की लम्बाई के लिये अधिकतम आवृति वाली कक्षा 36 से 40 M की है तथा संक्रमित पौधो की पत्तियों के लिये अधिकतम आवृति वाली कक्षा 41 में 45 M है। स्वस्थ पौधों की पत्तियों में इस कक्षा में केवल एक ही संरन्ध्र पाया जाता है। चौड़ाई के लिये स्वस्थ पौधों की पत्तियों में अधिकतम आवृति वाली कक्षा 26-30 M है। परन्तु संक्रमित पौधों की पत्तियों के लिये अधिकतम आवृति वाली कक्षा 31-35 M की है। 26-30 M वाली कक्षा में भी संरन्ध्रो की आवृति प्रायः समान है। 30-40 M और 41-45 M वाली कक्षाओं में भी संरध्रों की आवृति है जबकि स्वस्थ पौधों की पत्तियों में इन कक्षाओं में कोई भी सरन्ध्र नहीं पाये जाते हैं।

यादव ने सन् 1969 में यह भी बतलाया कि संरन्ध्रों का असामान्य विकास एक एक आनुवंशिक लक्षण है इसलिये इस आधार पर यह कह सकते हैं कि संरन्ध्रों के असामान्य विकास पौधों की संक्रमणता से घनिष्ट संबंध है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डा० बहादुर सिंह जी का मार्ग दर्शन तथा उत्साहवर्धन के लिये अत्यन्त आभारी हूँ।

निर्देश

1. इनामदार, जे० ए०, **करेन्ट साइन्स**, 1969, **16**, 443
2. डैहनैल, जी० एम०, **बौट० गज०**, 1960, 124
3. पाल, बी० पी०, रामानुजम, एस० तथा **मेनन**, ए० आर० 1952, **12** (1), 15-23
4. ब्राट, एल० और वैबर, एफ०, **फाइटान**, 1951, **3**, 22
5. यादव, आर० पी०, **करेन्ट साइन्स**, 1969, **38** (18), 441-42
6. राव, बी० आर० तथा रमय्या, एन०, **करेंन्ट साइन्स**, 1967, **13**, 357
7. विस्सनबौक, के०, **फाइटान**, 1949, **1**, 282,
8. वैबर, एफ०, **प्रोटोप्लाज्मा**, 1963, **37**, 556
9. शर्मा के० डी० तथा सेन, डी० एन०, **करेंन्ट सइान्स**, 1969, **38** (18), 394-95

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages, 223-226

मेपाक्रीन-मरक्यूरिक क्लोराइड संकुल

एस० एस० गुप्ता
रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल
तथा
आर० कौशल*
होल्कर विज्ञान महाविद्यालय, इन्दौर

[प्राप्त—अगस्त 20, 1976]

सारांश

चालकतामूलक अनुमापन तथा विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात हुआ कि मलेरिया ओषधियों में मेपाक्रीन, मरक्यूरिक क्लोराइड के साथ ऐल्कोहल माध्यम में 1:2 संकुल बनाता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (ir) से भी की गई है।

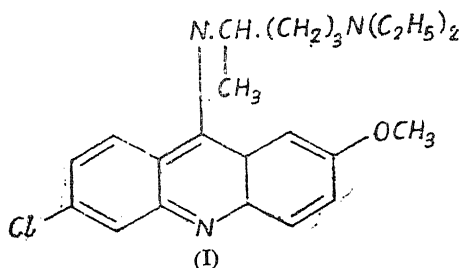
Abstract

Mepacrine-mercuric chloride complex. *By* S. S. Gupta and R. Kaushal, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Mepacrine, an antimalarial, forms 1:2 complex with mercuric chloride in lcoho lic solutions as indicated by conductivity measurements and analytical data. Structure assi gned is supported by ir spectral bands.

मेप्राक्रीन (I), 6-क्लोरो-9-[{4-(डाइ एथिल ऐमीनो)-1-मेथिल ब्यूटिल} ऐमीनो]-2-मेथाक्सी एक्रीडीन, का एक अणु मुख्य रूप से दो भागों में विभाजित किया जा सकता है :

$N.CH.(CH_2)_3N(C_2H_5)_2$
CH_3
OCH_3
Cl
N

(I)

* अवकाश प्राप्त प्राध्यापक

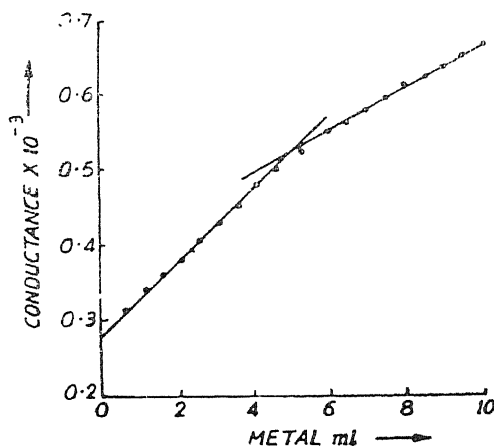
(1) डाइ एथिल ऐमीनो-1-मेथिल ब्यूटिल ऐमीनो पार्श्व शृंखला

तथा (2) डाइ आर्थो डाइ बेंजो-4-ऐमीनो पिरीडीन।

धातुओं के साथ संकुल बनाने में उपर्युक्त दोनों भाग या एक भाग काम में आता है, अतः धातुओं के साथ एन्टीमलेरियल के संकुलों के अध्ययन[1–4] को आगे बढ़ाते हुए प्रस्तुत शोधपत्र में मेपाक्रीन-मरक्यूरिक क्लोराइड संकुल वर्णित किया गया है।

प्रयोगात्मक

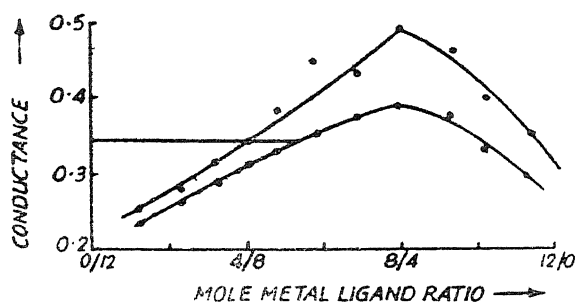
संकुल का संयोजन

(अ) मेपाक्रीन हाइड्रोक्लोराइड (0·01 M) तथा मरक्यूरिक क्लोराइड (0·01 M) के मानक विलयन 90% शुद्ध एथेनॉल में बनाये गये। लीगैन्ड के 2·5 मि०ली० को 300 मि०ली० तक तनु किया गया तथा उसका अनुमापन धातु विलयन के साथ 'तोशनीवाल' चालकतामापी द्वारा 29° से० पर किया गया। आयतन संशोधन के बाद प्राप्त परिणाम 1:2 मेपाक्रीन: मरक्यूरिक क्लोराइड संकुल की पुष्टि करते हैं (चित्र 1)।

चित्र 1

(ब) 1:2 संकुल की पुष्टि जाब की संतत विचरण विधि के उपयोग द्वारा चालकता अध्ययनों से भी होती है। चालकता अध्ययन के लिये दो बार आसवित जल का उपयोग करते हुए दो सांद्रताओं पर स्थायित्व स्थिरांक निकाले गए (चित्र 2)।

वियोजन तथा विश्लेषण

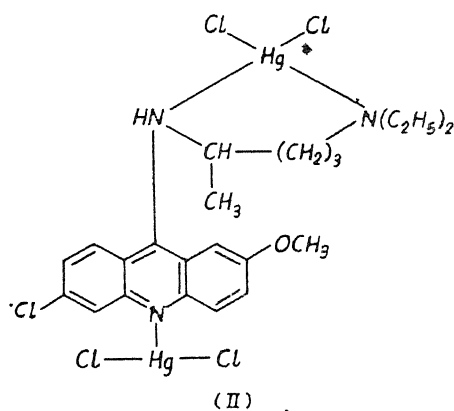
मेपाक्रीन बेस (आधिक्य) तथा मरक्यूरिक क्लोराइड (1 ग्राम) को अलग-अलग परिशुद्ध ऐल्कोहल की अल्प मात्रा में घोला गया। लीगेन्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के साथ

मिलाया गया तथा बाद में बर्फ में रखकर ठंडा किया गया। फलस्वरूप पीले रंग का संकुल प्राप्त हुआ जिसे छानकर तथा धोकर शुद्ध किया गया। संकुल 215° से० पर अपघटित हो जाता है। प्राप्ति: 1·4 ग्राम।

चित्र 2

संकुल में, Hg, 42·78, Cl, 15·51 तथा N, 3·90% प्राप्त हुए जबकि $C_{23}H_{30}ON_3Cl \cdot 2HgCl_2$ में सिद्धान्ततः Hg, 42·56, Cl, 15·04, तथा N, 4·45% होना चाहिए।

विवेचना

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर मेपाक्रीन-मरक्यूरिक क्लोराइड संकुल को संरचना (II) के द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

(II)

संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (ir) अध्ययन द्वारा भी होती है जिसमें धातु नाइट्रोजन का अवशोषण बैंड 645 cm^{-1} पर प्राप्त होता है। संकुल का स्थायित्व स्थिरांक (log K=7·02) तथा तदनुसार मुक्त ऊर्जा परिवर्तन ($\triangle F = -9{\cdot}3$ किलोकैलोरी प्रति मोल) ज्ञात किया गया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

शोधकार्य की सुविधाएँ प्रदान करने के लिये लेखक मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल के प्राचार्य डा० एस० एन० कवीश्वर के ग्राभारी हैं ।

निर्देश

1. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, ग्रार०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 649.
2. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दिकी, एस० तथा कौशल, ग्रार०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 769.
3. गुप्ता, एस० एस०, तथा कौशल, आर०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1975, **52**, 642.
4. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दिकी, एस० तथा कौशल, ग्रार०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1976, **53**, 242.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July 1977, Pages 227-235

सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त

सी० के० शर्मा
गणित विभाग, एस० एस० एल० टी०, पी० वी० एम०, परसिया

[प्राप्त—मई 14, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में सार्वीकृत परिवर्त

$$\phi(p)=\int_0^\infty (px)^l\, e^{-1/2px}\, W_{k,m}(px)\;\; H_{p',q'}^{m',n'}\left[z(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right] f(x)\, dx$$

के कुछ गुणों की स्थापना की गई है और इन गुणों के आधार पर कुछ महत्वपूर्ण समाकलों का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

On generalized Laplace transform-II. *By* C. K. Sharma, Department of Mathematics, S. S. L. T., P. V. M., Parasia.

In this paper, author has established some properties of the generalized Laplace transform defined as

$$\phi(p)=\int_0^\infty (px)^1\, e^{-1/2px}\, W_{k,m}(px)\, H_{p',q'}^{m',n'}\left[z(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right] f(x)\, dx$$

and also few important integrals have been evaluated by using these properties.

1. विषय प्रवेश :

लेखक[6] ने विख्यात लैप्लास परिवर्त

$$\phi(p)=\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx \tag{1·1}$$

को निम्न रूप में सार्वीकृत किया है

$$\phi(p)=\int_0^\infty (px)^1 e^{-1/2px} W_{k,m}(px)\, H^{m',n'}_{p',q'}\left[z(px)^\sigma \left| \begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right] f(x)\, dx \quad (1\cdot2)$$

जहाँ $W_{k,m}(x)$ ह्विटेकर फलन (2, p. 430) है तथा $H^{m',n'}_{p',q'}\left[x\left|\begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right]$ फाक्स द्वारा परिभाषित [3, p. 408] H-फलन है।

हमारा सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त (1·2), जब $p'=n'=z'=a_{p'}=b_{q'}=0,\ q'=m'=e_{p'}=f_{q'}=1,\ 1=m-\frac{1}{2}$ तथा $k=-m+\frac{1}{2}$ तो (1·1) में समानीत हो जाता है। हम (1·1) तथा (1·2) को सांकेतिक रूपों में निम्न प्रकार से व्यक्त करेंगे :

$$\phi(p)=f(x)$$

तथा

$$\phi(p)\ \frac{m', n'; p', q'}{l, k, m, \sigma}\ f(x).$$

2. प्रमेय 1 :

यदि $x^\lambda f(x)$ के सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त के साथ ही x^v गुणा H-फलन के nवें व्युत्पन्न को निम्न प्रकार व्यक्त किया जाय

$$\phi^{n\{(a_{p'})\}\{(b_{q'})\}}_{\theta,\sigma,v}(p)=\int_0^\infty (px)^1 e^{-1/2px} W_{k,m}(px) \frac{d^n}{dx^n}\left[x^v H^{m',n'}_{p',q'}\left[z(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right]\right] x^{-\lambda} f(x)\, dx \quad (2\cdot1)$$

तो

$$\phi^{n\{(a_{p'})\}\{(b_{q'})\}}_{\theta,\sigma,v}(p)=\phi^{\{-v,(a_{p'})\}\{(b_{q'}),-v+n\}}_{\sigma,v-n}(p) \quad (2\cdot2)$$

बशर्ते कि सन्निहित समाकल अभिसारी हों, $Re\left(v+\frac{b_h}{f_h}\right)>0\ (h=1, 2, \ldots, m')$ तथा $x^{+v} H^{m',n'}_{p',q'}\left[x\left|\begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right]$ के nवें व्युत्पन्न का अस्तित्व हो।

उपपत्ति

परिणाम (2·1) में [5, 3·1] का सम्प्रयोग करने से (2·2) प्राप्त होगा बशर्ते कि प्रमेय में कथित प्रतिबन्ध तुष्ट हों।

इसी प्रकार [5, 3·2 से 3·5] का उपयोग करने पर

$$\phi^{n\{(a_{p'})\}\{(b_{q'})\}}_{\theta,x,\sigma,v}(p)=\phi^{\{(-v)_n,(a_{p'})\}\{(b_{q'}),(-v)_n\}}_{\sigma,v}(p) \quad (2\cdot3)$$

$$\phi_{\theta,x,\sigma,v}^{n\{(a_{p'})\}\{(b_{q'})\}}(p)=\phi_{\sigma,v}^{\{(-v-1)_n,(a_{p'})\}\{(b_{q'}),(-v)_n\}}(p) \qquad (2\cdot4)$$

$$\phi_{1/x\cdot\theta,\sigma,v}^{n\{(a_{p'})\}\{(b_{q'})\}}(p)=\phi_{\sigma,v-2n}^{\{-v,\ldots,-v+2n-2,(a_{p'})\}\{b_{q'}),1-v,\ldots,2n-1-v\}}(p) \qquad (2\cdot5)$$

तथा
$$\phi_{\theta\cdot 1/x,\sigma,v}^{n\{(a_{p'})\}\{(b_{q'})\}}(p)=\phi_{\sigma,v-2n}^{\{1-v,2-v,\ldots,-v+2n-1,(a_{p'})\}\{(b_{q'})\{,2n-v,\ldots,2-v\}}(p) \qquad (2\cdot6)$$

जहाँ $\theta=\frac{d}{dx}$ तथा; $(a)_n=a(a+1),\ldots,(a+n-1)$ तथा (2·2) में उल्लिखित समस्त प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

उदाहरण 1 :

माना $f(x)=x^{\lambda+\mu}$

तो

$$\phi_{\sigma,v-n}^{\{-v,(a_{p'})\}\{(b_{q'}),-v+n\}}(p)=1/p^{\mu+v-n+1}\int_0^\infty (px)^{(1+\mu+v-n+1)-1}$$

$$G_{12}^{20}\left(px\middle|\begin{matrix}1-k\\ m+\frac{1}{2},\ -m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right) H_{p'+1,q'+1}^{m',n'+1}\left[z(px)^\sigma\middle|\begin{matrix}(-v,\sigma),(a_{p'},e_{p'})\\ (b_{p'},f_{q'}),(-v+n,\sigma)\end{matrix}\right] d(px)$$

अब (1, p. 318), के सम्प्रयोग से

$$\phi_{\sigma,v-n}^{\{-v,(a_{p'})\}\{(b_{q'}),-v+n\}}(p)=1/p^{\eta-1}\ H_{p'+3,q'+2}^{m',n'+3}\left[z\middle|\begin{matrix}(-v,\sigma),(a_{n'},e_{n'}),\\ (b_{m'},f_{m'}),(k-\eta,\sigma),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(\frac{1}{2}-m-\eta,\sigma),(\frac{1}{2}+m-\eta,\sigma),(a_{n'}+1,e_{n'}+1),\ldots,(a_{p'},e_{p'})\\ (b_{m'+1},f_{m'+1}),\ldots,(b_{q'},f_{q'}),(-v+n,\sigma)\end{matrix}\right] \qquad (2\cdot7)$$

जहाँ $\eta=1+\mu+v-n+1$

बशर्ते कि $Re(\frac{1}{2}+m+\eta+\sigma b_h/f_h)>0\ (h=1,2,\ldots,m')$

$$Re\left[\eta-1+\sigma\frac{(a_{h'}-1)}{a_{h'}}\right]<0\ \ (h'=1,2,\ldots,n')\ |\arg z|<\tfrac{1}{2}\lambda'\pi$$

जहाँ
$$\lambda'\equiv\sum_{j=1}^{n'}\partial_j-\sum_{j=n'+1}^{p'}e_j+\sum_{j=1}^{m'}f_j-\sum_{j=m'+1}^{q'}f_j>0$$

(2.2) से (2.7) के सम्प्रयोग से हमें निम्नांकित समाकल प्राप्त होते हैं

$$\int_0^\infty (px)^{1+\mu}\, e^{-1/2px}\, W_{k,m}(px)\frac{d^n}{dx^n}\left[x^v\ H_{p',q'}^{m',n'}\left[z(px)^\sigma\middle|\begin{matrix}(a_{p'},e_{p'})\\ (b_{q'},f_{q'})\end{matrix}\right]\right]dx$$

$$=1/p^{v-n+1}\,H_{p'+3,q'+3}^{m',n+3}\left[z\middle|\begin{matrix}(-v,\sigma),(a_{n'},e_{n'}),(\frac{1}{2}\pm m-\eta,\sigma),(a_{n'+1},e_{n'+1}),\\ (b_{m'},f_{m'}),(k-\eta,\sigma),(b_{m'+1},f_{m'+1}),\ldots\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\ldots,(a_{p'},n_{p'})\\ (b_{q'},f_{q'}),(-v+n,\sigma)\end{matrix}\right] \qquad (2\cdot8)$$

$$\int_0^\infty (px)^{1+\mu}\, e^{-1/2px}\, W_{k,m}(px) \left(x-\frac{d}{dx}\right)^n \left[x^v\, H^{m',n'}_{p',v'}\left[z(px)^\sigma \left|\begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right]\right] d\ x$$

$$=1/p^{v+1}\, H^{m',n'+n+2}_{p'+n+2,q'+n+1}\left[z\left|\begin{matrix}(-v,\sigma)_n, (a_{n'}, e_{n'}), (\tfrac{1}{2}\pm m-\eta, \sigma), (a_{n'+1}, e_{n'+1}), \ldots, (a_{p'}, e_{p'})\\ (b_{m'}, f_{m'}), (k-\eta, \sigma), (b_{m'+1}, f_{m'+1}), \ldots, (b_{q'}, f_{q'}), (1-v, \sigma)_n)\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot9)$$

$$\int_0^\infty (px)^{1+\mu}\, e^{-1/2px}\, W_{k,m}(px)\left(\frac{d}{dx}\cdot x\right)^n\left[x^v\ H^{m',n'}_{p',q'}\left[z(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right]\right]dx$$

$$=1/p^{v+1}\ H^{m',n'+n+2}_{p'+n+2,q'+n+1}\left[z\left|\begin{matrix}(-v-1,\sigma)_n, (a_{n'}, e_{n'}), (\tfrac{1}{2}\pm m-\eta, \sigma), (a_{n'+1}, e_{n'+1}), \ldots, (a_{p'}, e_{p'})\\(b_{m'}, f_{m'}), (k-\eta, \sigma), (b_{m'+1}, f_{m'+1}), \ldots, (b_{q'}, f_{q'}), (-v, \sigma)_n\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot10)$$

$$\int_0^\infty (px)^{1+\mu}\ e^{-1/2px}\ W_{k,m}(px)\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\right)^n\left[\ x^v\ H^{m',n'}_{p',q'}\left[z(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right]\right]$$

$$=1/p^{v-2n+1}\ H^{m',n'+2n+1}_{p'+2n+1,q'+2n}\left[z\left|\begin{matrix}(-v,\sigma), \ldots, (-v+2n-2, \sigma), (a_{n'}, e_{n'}), (\tfrac{1}{2}-\eta\pm m, \sigma), (a_{n'+1}, e_{n'+1}), \ldots, (a_{p'}, e_{p'})\\(b_{m'}, f_{m'}), (k-\eta, \sigma), (b_{m'+1}, f_{m'+1}), \ldots, (b_{q'}, f_{q'}), (1-v, \sigma), \ldots, (2n-1-v, \sigma)\end{matrix}\right.\right] (2\cdot11)$$

$$\int_0^\infty (px)^{1+\mu}\ e^{-1/2px}\ W_{k,m}(px)\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{x}\right)^n\left[\ x^v\ H^{m',n'}_{p',q'}\left[z(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right]\right] dx$$

$$=1/p^{v-2n+1}\ H^{m',n'+2n+1}_{p'+2n+1,q'+2n}\left[z\left|\begin{matrix}(1-v,\sigma), \ldots, (2n-1-v, \sigma), (a_{n'}, e_{n'}), (\tfrac{1}{2}-\eta\pm m, \sigma), (a_{n'+1}, e_{n'+1}), \ldots, (a_{p'}, e_{p'})\\(b_{m'}, f_{m'}), (k-\eta, \sigma), (b_{m'+1}, f_{m'+1}), \ldots, (b_{q'}, f_{q'}), (2n-v, \sigma), \ldots, (2-v, \sigma)\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot12)$$

समाकलन चिन्ह् के भीतर अवकलन को वैध माना जा सकता है क्योंकि x-समाकलन कम से कम निम्नलिखित दशाओं में पूर्णतया अभिसारी है

(i) $\lambda_1>0, |\arg x|<\frac{1}{2}\pi\lambda_1$; (ii) $\lambda_1\geqslant 0, |\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\pi\lambda_1$ तथा $Re(\mu'+1)<0$

जहाँ $\lambda_1\equiv \sum_{j=1}^{n'} e_j-\sum_{j=n'+1}^{p'} e_j+\sum_{j=1}^{m'} f_j-\sum_{j=m'+1}^{q'} f_j>0$

तथा $\mu'=\frac{1}{2}(p'-q')+\sum_{j=1}^{q'} b_j-\sum_{j=1}^{p'} a_j$

उदाहरण 2 :

यदि $f(x)=x^{\lambda}\, e^{-1/2pqx}\, M_{A,B}(pqx)$

तो $\phi_{\sigma,v-n}^{\{-v,(a_{p'})\}\{(b_{q'}),-v+n\}}(p)=1/p^{v-n}\int_0^{\infty}(px)^{1+v-n}\, e^{-1/2(q+1)px}$

$$M_{A,B}(pqx)\, W_{k,m}(px)\, H_{p'+1,q'+1}^{m',n'+1}\left[z(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(-v,\sigma),(a_{p'},e_{p'})\\(b_{q'},f_{q'}),(-v+n,\sigma)\end{matrix}\right.\right]dx \quad (2\cdot13)$$

अब (2.13) में [4, p.864] का उपयोग करने पर दक्षिण पक्ष

$$=q^{B+1/2}/p^{v-n+1}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+A+B)_u}{(2B+1)_u}\frac{(-q)^u}{u!}H_{p'+3',q'+2}^{m',n'+3}\left[z\left|\begin{matrix}(-v,\sigma),\\b_{q'},f_{q'}),\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(-1-B\pm m-l-v+n-u,\sigma),(a_{p'},e_{p'})\\(-v+n,\sigma),(\frac{3}{2}-B+k-l-v+n-u,\sigma)\end{matrix}\right] \quad (2\cdot14)$$

होगा बशर्ते कि $Re\left(1+1+v-n+\sigma\dfrac{b_h}{f_h}\right)>|\, Re\; m\,|-1(h=1,2,\ldots,m')$ $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi\lambda'$, $Re(q)>0,\; Re(\sigma)>0$

जहाँ $\lambda'\equiv\sum_{j=1}^{m'}f_j-\sum_{j=m'+1}^{q'}f_j+\sum_{j=1}^{n'}e_j-\sum_{j=n'+1}^{p'}e_j>0$

(2.2) में (2.14) का सम्प्रयोग करने पर समाकलन (2.15) प्राप्त होगा ।

$$\int_0^{\infty}(px)^l\, e^{-1/2(q+1)px}\, M_{A,B}(pqx)\, W_{k,m}(px)\,\frac{d^n}{dx^n}\left[x^v\, H_{p',q'}^{m',n'}\left[z(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_{p'},e_{p'})\\(b_{q'},f_{q'})\end{matrix}\right.\right]\right]dx$$

$$=\frac{q^{B+1/2}}{p^{v-n+1}}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+A+B)_u}{(2B+1)_u}\frac{(-q)^u}{u!}H_{p'+3,q'+2}^{m',n'+3}\left[z\left|\begin{matrix}(-v,\sigma),(-1-B\pm m-l-v+n-u,\sigma)\\(b_{q'},f_{q'}),(-v+n,\sigma),(-\frac{3}{2}-B+k\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_{p'},e_{p'})\\-l-v+n-u,\sigma)\end{matrix}\right] \quad (2\cdot15)$$

इसी प्रकार परिणाम (2.2) के स्थान पर (2.3) से (2.6) परिणामों का उपयोग करके अन्य समाकल प्राप्त किया जा सकता है ।

3. प्रमेय 2 :

आवर्ती सूत्र, जो कि $W_{k,m}(z)$ के लिये सत्य है, वह फलन $x^{-\lambda} f(x)$ के हमारे सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त (1.2) के लिये भी सत्य उतरता है जहाँ λ कोई काल्पनिक प्राचल है बशर्ते कि समाकल तथा सन्निहित श्रेणी अभिसारी हों ।

उपपत्ति :

हमें ज्ञात है कि फल (7, p. 27)

$$W_{k+1/2,m}(z)-z^{1/2}\,W_{k,m-1/2}(z)-(m-k)W_{k-1/2,m}(z)=0$$

अब $k+\frac{1}{2}$ के स्थान पर k रखने से

$$W_{k,m}(z)=z^{1/2}\,W_{k-1/2,m-1/2}(m-k+\tfrac{1}{2})\,W_{k-1,m}(z) \tag{3·1}$$

माना कि

$$\phi_{k,m,\lambda}(p)=p^{1/2}\int_0^\infty (px)^1\,e^{-1/2px}\,W_{k,m}(px)\,H^{m',n'}_{p',q'}\left[z(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_{p'},e_{p'})\\(b_{q'},f_{q'})\end{matrix}\right.\right]\;x^{-\lambda}f(x)\,dx \tag{3·2}$$

(3.1) तथा (3.2) से हमें

$$\phi_{k,m,\lambda}(p)=p^{1/2}\,\phi_{k-1/2,m-1/2,\lambda-1/2}(p)+(m-k+\tfrac{1}{2})\,\phi_{k-1,m,\lambda}(p). \tag{3·3}$$

प्राप्त होगा बशर्ते कि (3.3) में आया समाकल पूर्णतया अभिसारी है ।

इसी प्रकार [7, p. 27] का उपयोग करने पर हमें अपने सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त के निम्नलिखित प्रकार के आवर्ती सूत्र प्राप्त होते हैं :

$$\phi_{k,m,\lambda}(p)=p^{1/2}\,\phi_{k-1/2,m-1/2,\,\lambda-1/2}(p)-(m+k-\tfrac{1}{2})\,\phi_{k-1,m,\lambda}(p) \tag{3·4}$$

$$\frac{2m}{\sqrt{p}}\,\phi_{k,m,\lambda}(p)=\phi_{k+1/2,m+1/2,\lambda-1/2}(p)+\phi_{k+1/2,m-1/2,\lambda-1/2}(p) \tag{3·5}$$

$$2k\phi_{k,m,\lambda}(p)=p\phi_{k,m,\lambda-1}(p)-\phi_{k+1,m,\lambda}(p)+(m-k+\tfrac{1}{2}),(m+k-\tfrac{1}{2})\phi_{k-1,m,\lambda}(p) \tag{3·6}$$

$$\frac{2m}{(p)^{1/2}}\,\phi_{k,m,\lambda}(p)=(k+m-\tfrac{1}{2})\phi_{k-1/2,m-1/2,\lambda-1/2}(p)-(k-m-\tfrac{1}{2})\phi_{k-1/2,m+1/2,\lambda-1/2}(p) \tag{3·7}$$

$$\frac{2m}{(p)^{1/2}}\,\phi_{k,m,\lambda}(p)=(k+m-\tfrac{1}{2})\phi_{k-1/2,m-1/2,\lambda-1/2}(p)-p^{1/2}\,\phi_{k,m,\lambda-1}(p)+\phi_{k+1/2,m+1/2,\lambda-1/2}(p) \tag{3·8}$$

$$\frac{2m}{(p)^{1/2}}\,\phi_{k,m,\lambda}(p)=p^{1/2}\phi_{k,m,\lambda-1}(p)+(k-m-\tfrac{1}{2})\phi_{k-1/2,m+1/2,\lambda-1/2}(p)-\phi_{k+1/2,m-1/2,\lambda-1/2}(p) \tag{3·9}$$

उदाहरण :

हमें परिणाम

$$x^{-\lambda}f(x)=x^{-\lambda}\,e^{-1/2pqx}\,M_{A,B}(pqx)\,\frac{m'.\,n':\,p',q'}{l,\,k,\,m,\,\sigma}\,p^{\lambda-1}q^{B+1/2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+A+B)_n}{(2B+1)_n} \frac{(-q)^n}{n!} H_{p'+2,q'+1}^{m',n'+2}\left[z\left|\begin{matrix}(-1-B\pm m-l+\lambda-n, \sigma),(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'}),(-\frac{3}{2}-B+k-l+\lambda-n, \sigma)\end{matrix}\right.\right] \quad (3\cdot10)$$

सरलता से प्राप्त होगा बशर्ते कि $Re\, q>0$, $Re\, \sigma>0$, $Re(1+1-\lambda+B+\sigma\, b_h/f_h)>|\, Re\, m\,|$ $-1 (h=1, 2, ..., m')$ तथा $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi\lambda'$

जहाँ $\lambda'\equiv \sum_{j=1}^{m'} f_j-\sum_{j=m'+1}^{q'} f_j+\sum_{j=1}^{n'} e_j-\sum_{j=n'+1}^{p'} e_j>0$

तो परिणाम (3.3) में परिणाम (3.10) को सम्प्रयुक्त करके एवं प्राचलों को समंजित करने से हमें हाइपरज्यामितीय फलन के लिये निम्नवत् आवर्ती सूत्र प्राप्त होगा

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a', b', c';\\ d', e';\end{matrix}\, ; x\right]=\frac{c'\sqrt{p}}{e'}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}a', b', c'+1;\\ d', e'+1;\end{matrix}\, ; x\right]+\left(1-\frac{c'}{e'}\right){}_3F_2\left[\begin{matrix}a_{,}, b', c';\\ d', e'+1;\end{matrix}\, x\right] \quad (3\cdot11)$$

इसी प्रकार हम अपने सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त के अन्य आवर्ती सूत्रों को लेकर ऊपर दी गई विधि का उपयोग करते हैं तो हमें हाइपरज्यामितीय फलन के कुछ और आवर्ती सूत्र प्राप्त होते हैं।

4· प्रमेय 3 :

यदि $x^{-\lambda} f(x)$ का हमारा सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त $W_{k,m}(px)$ के प्रथम व्युत्पन्न के प्रति $\phi'_{k,m,\lambda}(p)$ हो अर्थात्

$$\phi'_{k,m,\lambda}(p)=\int_0^{\infty} (px)^l e^{-1/2px} \frac{d}{dx}[W_{k,m}(px)]\, H_{p',q'}^{m',n'}\left[z(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right.\right] x^{-\lambda} f(x)\, dx \quad (4\cdot1)$$

तो
$$p\phi'_{k,m,\lambda}(p)=\tfrac{1}{2}p\phi_{k,m,\lambda}(p)-k\phi_{k,m,\lambda+1}(p)-\phi_{k+1,m,\lambda+1}(p) \quad (4\cdot2)$$

बशर्ते कि $f(x)=O(x^{\lambda'})$ लघु x के लिये

तथा $Re(1+\lambda'\pm m+\sigma b_h/f_h+3/2)>0$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi\lambda''$, $Re\,\sigma>0$ जहाँ $h=1, 2, ..., m'$

तथा $\lambda''\equiv \sum_{j=1}^{m'} f_j-\sum_{j=m'+1}^{q'} f_j+\sum_{j=1}^{n'} e_j-\sum_{j=n'+1}^{p'} e_j>0$

उपपत्ति :

स्लेटर (7, p. 25) के अनुसार

$$W_{k+1,m}(z)=(\tfrac{1}{2}z-k)W_{k,m}(z)-zW'_{k,m}(z) \quad (4\cdot3)$$

(4.1) में (4.3) से $W'_{km}(px)$ का मान रखने पर एवं प्राचल को समंजित करने पर परिणाम (4.2) की प्राप्ति होती है।

उदाहरण :

$f(x)=e^{-1/2pqx}\, M_{A,B}(pqx)$ मानने पर तथा परिणाम (3.10) का उपयोग करने पर

$$\phi'_{k,m,\lambda}(p)=\tfrac{1}{2}\, p^{\lambda-1}q^{B+1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+A+B)_n}{(2B+1)_n}\frac{(-q)^n}{n!}\, H^{m',n'+2}_{p'+2,q'+1}\left[z\left|\begin{matrix}(-1-B\pm m-l+\lambda-n,\ \sigma),(a_{p'},e_{p'})\\(b_{q'},f_{q'}),\ (-\frac{3}{2}-B+k-l+\lambda-n,\ \sigma)\end{matrix}\right.\right]-kp^{\lambda-2}q^{B+1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+A+B)_n}{(2B+1)_n}\frac{(-q)^n}{n\,!}$$

$$H^{m',n'+2}_{p'+2,q'+1}\left[z\left|\begin{matrix}(-B\pm m-l+\lambda-n,\ \sigma),\ (a_{p'},\ e_{p'})\\(b_{q'},f_{q'}),\ (-\frac{1}{2}-B+k-l+\lambda-n,\ \sigma)\end{matrix}\right.\right]-p^{\lambda-2}q^{B+1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+A+B)_n}{(2B+1)_n}$$

$$\frac{(-q)^n}{n!}\, H^{m',n'+2}_{p'+2,q'+1}\left[z\left|\begin{matrix}(-B\pm m-l+\lambda-n,\ \sigma),\ (a_{p'},\ e_{p'})\\(b_{q'},f_{q'}),\ (\frac{1}{2}-B+k-l+\lambda-n,\ \sigma)\end{matrix}\right.\right]$$

बशर्ते कि $Re\, q>0$ तथा $Re\,(1-\lambda+B+1+\sigma\, b_h/f_h)>|\,Re\, m\,|-1\ (h=1,\,2,\,\ldots,\,m')$

5. प्रमेय 4 :

$$\text{यदि}\quad \phi_u(p)\,\frac{m',\,n':p',q'}{1,\,k+u,\,m,\,\sigma},\,f(x)\tag{5·1}$$

$$\text{तो}\quad \sum_{u=0}^{\infty}\frac{(-1)^u}{u!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^u\phi_u(px)=y^{-k}\int_0^{\infty}(p)^l\, e^{-pxy}\, W_{k,m}(pxy)\quad H^{m',n'}_{p',q'}\left[z(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_{p'},\ e_{p'})\\(b_{q'},f_{q'})\end{matrix}\right.\right]f(x)\,dx\tag{5·2}$$

बशर्ते कि $f(x)=0(x^{\lambda'})$ लघु x के लिये, $Re(1+\lambda'\pm m+\sigma b_h/f_h+3/2)>0\ \ (h=1,\,2,\,\ldots,\,m')$, $|\arg z\,|<\frac{1}{2}\pi\lambda''$

जहाँ $\lambda''\equiv\sum_{j=1}^{m'}f_j-\sum_{j=m'+1}^{q'}f_j+\sum_{j=1}^{m'}e_j-\sum_{j=n'+1}^{p'}e_j>0$

और श्रेणी समरूप से अभिसारी है।

उपपत्ति :

(5.1) से

$$\phi_u(p)=\int_0^{\infty}(px)^l\, e^{-1/2px}\, W_{k+u,m}(px)\ H^{m',n'}_{p',q'}\left[z(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_{p'},\ e_{p'})\\(b_{q'},\ f_{q'})\end{matrix}\right.\right]f(x)\,dx$$

दोनों पक्षों में $\frac{(-1)^u}{u!}\,(1-1/y)^u$ से गुणा करने, 0 से ∞ तक संकलन करने एवं अन्त में परिणाम (7, p. 30) का उपयोग करने से हमें (5·2) की प्राप्ति होगी।

उदाहरण :

$f(x)=e^{-1/2pqx}\, M_{A,B}(pqx)$ मानने एवं परिणाम (5.2) में परिणाम (3.10) का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty (px)^l\, e^{-1/2(q+1)px}\, M_{A,B}(pqx)\, W_{k,m}(px)\, H_{p',q'}^{m',n'}\left[z(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(a_{p'}, e_{p'})\\(b_{q'}, f_{q'})\end{matrix}\right] dx$$

$$=y^k \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u}{u\,!}\left(1-\frac{1}{y}\right)\frac{q^{B+1/2}}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+A+B)_n}{(2B+1)_n}\frac{(-q)^n}{n!}\; H_{p'+2,q'+1}^{m',n'+2}\left[z \middle| \begin{matrix}(-1-B\pm m-l-n,\,\sigma),\,(a_{p'},\,e_{p'})\\(b_{q'},\,f_{q'}),\,(-\frac{3}{2}-B+k-l-n,\,\sigma)\end{matrix}\right] \quad (5\cdot3)$$

जहाँ $\quad Re\, q>0,\; Re(1+1+B+\sigma b_h/\,f_h)>|\,Re\, m\,|-1\;\; (h=1, 2, ..., m')$

समाकलन एवं संकलन के क्रम में परिवर्त वैध है क्योंकि समाकल तथा श्रेणी परम एवं समरूप से अभिसारी है।

निर्देश

1. अनन्दानी, पी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस**, 1968, **6**, 312-21.
2. एर्डेल्यी, ए०, Table of Integral transform **भाग** II, **मैकग्राहिल**, 1954.
3. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
4. ग्राडशेटिन, आई० एस० तथा रिजिक, आई० एम०, Table of Integrals Series and Product, **एकेडमिक प्रेस**, 1965.
5. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस**, 1968, **37A**, 189-92.
6. शर्मा, सी० के०, (**प्रकाशनाधीन**)
7. स्लेटर, सी० जे०, Confluent Hypergeometric function, **कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस**, 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages 237-242

चेजारो माध्यों के द्वारा परागोलीय श्रेणी के जनक फलन का सन्निकटन

जे० पी० पोरवाल
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, माधव साइंस कालेज, उज्जैन

[प्राप्त—जनवरी 10, 1977]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य चेजारों माध्यों के द्वारा परागोलीय श्रेणी के सन्निकटन के क्रम हेतु कुछ नवीन परिणाम स्थापित करना है।

Abstract

Approximation to the generating function by the Cesaro means of its ultraspherical series. *By* J. P. Porwal, Department of Mathematics and Statistics, Madhav Science College, Ujjain.

The object of the present paper is to establish some new results for the order of approximation of the ultraspherical series by Cesaro means.

1. परागोलीय बहुपदों को निम्नांकित प्रसार द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$(1-2xz+z^2)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, p_n^{(\lambda)}(x) \tag{1·1}$$

माना कि $f(\theta, \phi)$ एक फलन है जो गोला S पर परास $0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$ के लिये परिभाषित है। इसे फल से सम्बद्ध परागोलीय श्रेणी होगी

$$f(\theta, \phi)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\iint_S \frac{p_n^{(\lambda)}(\cos\omega) f(\theta', \phi')\, d\sigma'}{[\sin^2\theta \sin^2(\phi-\phi')]^{1/2-\lambda}} \tag{1·2}$$

जहाँ $\cos\omega=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$

तथा $d\sigma' = \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi'$

गोले पृष्ठ पर फलन

$$f(\theta', \phi')[\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi')]^{1/2-\lambda} \tag{1.3}$$

की लेठोस्क समाकलनीयता की कल्पना करते हुये कग्बेतलियांत्ज ने $f(\theta, \phi)$ के गोलीय माध्य को निम्नवत परिभाषित किया है

$$f(\omega) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\lambda)}{\Gamma\lambda \, 2\pi \, (\sin\omega)^{2\lambda}} \int \frac{f(\theta', \phi') \, d\sigma'}{[\sin^2\theta \sin^2(\phi-\phi']^{1/2-\lambda}} \tag{1·4}$$

जहाँ समाकल एक लघु वृत्त पर दिया जाता है जिसकी त्रिज्या ω है। $k<2\lambda$ के प्रसंग में जहाँ k चेजारो योगफल का क्रम है, हम यह मान लेते हैं कि फलन

$$\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{k-2\lambda} f(\theta', \phi')[\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi']^{\lambda-1(2} \tag{1·5}$$

S पर पूर्णतया समाकलनीय है।

हम लिखेंगे :

$$\phi(\omega) = \left\{f(\omega) - \frac{A\Gamma\lambda}{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\lambda)}\right\} (\sin\omega)^{2\lambda};$$

$$\Phi_p(x) = \frac{1}{\Gamma p}\int_0^x (x-t)^{p-1} \phi(t) \, dt, \; p>0;$$

$$\Phi_0(x) = \Phi(x);$$

$$\Phi_p(x) = \Gamma(p+1) x^{-p} \, \Phi_p(x), \; p \geqslant 0;$$

$$\Phi_p(x) = \frac{d}{dx} \Phi_{p+1}(x), \; -1<p<0.$$

ओब्रेचकाफ[1] ने श्रेणी (1·2) के चेजारो माध्यों $\sigma_n{}^k$ के क्रम के सम्बन्ध में निम्नलिखित फल सिद्ध किया है।

प्रमेय

यदि $p \geqslant 0, \; 0 \leqslant a < 1$

तथा $$\int_0^t |\phi_p(t)| \, dt = O(t^{1+2\lambda+\alpha})_{t\to o},$$

तो $p+\lambda+1 \geqslant k \geqslant p+\lambda+\alpha$ के लिये

$$\overset{k}{\sigma}_u - A = O(n^{-\alpha}),\ k > p+\lambda+\alpha;$$

$$= O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right),\ k = p+\lambda+\alpha;$$

गुप्ता[3] ने यह प्रदर्शित किया है कि यदि

$$\int_0^{\pi} \frac{|\phi_p(t)|}{t^{1+2\lambda}}\,dt = O\left[\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\gamma+1}\right]_{t\to 0},$$

$-1 < \gamma < \infty$ तथा किसी $p > 0$ के लिये तो

$$\overset{k}{\sigma}_n - A = O[\log n)^{\gamma+1}]$$

जहाँ $K = p+\lambda$

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य चेजारो माध्यम के द्वारा परागोलीय श्रेणी (1·2) के सन्निकटन क्रम के लिये कुछ नवीन परिणाम स्थापित करना है ।

2. हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे

प्रमेय

यदि $\Phi(t) = \int_0^t |\phi_p(t)|\,dt = O\left[t^{1+2\lambda+\alpha}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\gamma}\right]_{t\to 0},$

क्योंकि $0 \leqslant \gamma < \infty$ तथा $p \geqslant 0,\ 0 \leqslant \alpha < 1$

तो

$$\overset{k}{\sigma}_n - A = O[n^{-\alpha}(\log n)^{\gamma}],\ k \geqslant p+\lambda+\alpha$$

3. प्रमेय की उपपत्ति के लिये हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की अवश्यकता पड़ेगी ।

प्रमेयिका 1

माना $\overset{k}{s}_n(\omega)$ से श्रेणी

$$\Sigma(n+\lambda)\, p_n^{(\lambda)}(\cos\omega)$$

का का k कोटि का nवां चेजारो माध्य व्यक्त होता है तो $\lambda > 0$ तथा $p \geqslant 0$ के लिये

$$s_n^{(p)}(\omega)\begin{cases} O(n^{2\lambda+p+1}) \text{ क्योंकि } 0\leqslant\omega\leqslant\pi,\ k>0 \\ O\Big(\frac{n^{\lambda+p-k}}{\omega^{k+\lambda+1}}\Big)+O\Big(\frac{1}{n\omega^{2\lambda+2+p}}\Big) \\ \text{क्योंकि } 0\leqslant\omega\leqslant a<\pi \\ O\Big(\frac{n^{\lambda+p-k}}{\omega^{k+\lambda+1}}\Big) \\ \text{क्योंकि } 0<\omega\leqslant a<\pi \\ \text{तथा } \lambda+1+[p]\geqslant k \end{cases} \tag{3·1}$$

प्रमेयिका 2

यदि η कोई स्थिर धन संख्या (अचर) है जो π से कम है तो दिये हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$\sigma_n^{k}-A=\int_0^{\eta}\phi(\omega)\, s_n^{k}(\omega)\, d\omega+0(1) \quad \text{क्योंकि } K>\lambda \tag{3·2}$$

प्रमेयिका 1 तथा 2 के लिये देखें ओब्रेचकाफ[1]।

4. प्रमेयिका 2 के आधार पर इतना ही सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि

$$\int_0^{\eta}\phi(\omega)\, s_n^{p+\lambda}(\omega)\, d\omega=O[n^{-\alpha}(\log n)^{\gamma}],\ k>p+\lambda+\alpha \tag{4·1}$$

जहाँ $\lambda+[p]+1\geqslant k>p+\lambda+\alpha,$

m बार खण्डशः समाकलित करने पर

$$\int_0^{\eta}\phi(\omega)\, s_n^{p+\lambda}(\omega)\, d\omega=\Big[\sum_{\rho=1}^{m}(-1)^{\rho-1}\phi_\rho(\omega)\, s_n^{(\rho-1)}(\omega)\Big]_0^{\eta}+(-1)^n\int_0^{\eta}\phi_m(\omega)\, s_n^{(m)}(\omega)\, d\omega \tag{4·2}$$

और भी, असमाकल $p=m+\sigma(0<\sigma<1)$ के लिये आंशिक व्युत्पन्नों की परिभाषा से

$$\int_0^{\eta}\Phi_p(\omega)\, s_n^{(p)}(\omega)\, d\omega=\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^{\eta}\Phi_p(\omega)\, d\omega\int_{\omega}^{\eta}(t-\omega)^{-\sigma}\, s_n^{(m+1)}(t)\, dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^{\eta}s_n^{(m+1)}(t)\, dt\int_0^{t}(t-\omega)^{-\sigma}\,\Phi_p(\omega)\, d\omega$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^{\eta}s_n^{(m+1)}\Big(\quad\int_0^{t}(t-\omega)^{-\sigma}\Big\{\frac{1}{\Gamma\sigma}\int_0^{\omega}(\omega-u)^{\sigma-1}\,\Phi_m(\omega)\, d\omega\Big\}\, du$$

$$=\frac{1}{\Gamma\sigma\Gamma(1-\sigma)}\int_0^\eta s_n^{(m+1)}(t)\,dt\int_0^t \Phi_m(-u)\left\{\int_u^t (t-\omega)^{-\sigma}(\omega-u)^{\sigma-1}\,d\omega\right\}du \quad (4\cdot3)$$

$\omega=u+(t-u)\xi$ प्रतिस्थापन द्वारा

$$\int_u^t (t-\omega)^{-\sigma}(\omega-u)^{\sigma-1}=\int_0^1 (1-\xi)^{-\sigma 1}\,\xi^{\sigma-1}\,d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(1-\sigma)\Gamma\sigma}{\Gamma 1}$$

फलतः (4·3) से

$$\int_0^\eta \Phi_p(\omega)\,s_n^{(p)}(\omega)\,d\omega=\int_0^\eta s_n^{(m+1)}(t)\,\Phi_{m+1}(t)\,dt$$

$$=\Phi_{m+1}(\eta)\,s_n^{(m)}(\eta)-\int_0^\eta \Phi_m(t)\,s_n^{(m)}(t)\,dt \quad (4\cdot4)$$

अतः (4·2) तथा (4·5) से

$$J=\int_0^\eta \phi(w)\,s_n^{p+\lambda}(\omega)\,d\omega$$

$$=\left\{\sum_{\rho=1}^{m}(-1)^{\rho-1}\Phi_\rho(\omega)s_n^{(\rho-1)}(\omega)\right\}_0^\eta+(-1)^m\{\Phi_{m+1}(\eta)\,s_n^{(m)}(\eta)-\int_0^\eta \Phi_p(u)\,s_n^{(p)}(u)\}\,du$$

$$=J_1+J_2+J_3,\ \text{माना} \quad (4\cdot5)$$

अब $s_n^{(q)}(\eta)=O\left(\frac{1}{n^{k-q-\lambda}}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$ प्रमेयिका 1 से

$$=O\left(\frac{1}{n^{p-q}}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

अब $J_1=0(1)$ जब $n\to\infty$, बशर्ते कि $q<p$

(3·1) में द्वितीय असमिका से हम पाते हैं कि (4·6)

$$J_2=0(1). \quad (4\cdot7)$$

अतः

$$J=0(1)+(-1)^{m+1}\int_0^\eta \Phi_p(u)\,s_n^{(p)}(u)\,du$$

$$=0(1)+\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(p+1)}\int_0^\eta u^p\,\phi_p(u)\,s_n^{(p)}(u)\,du$$

$$=0(1)+\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(p+1)}L,\ \text{माना}$$

जहाँ

$$L=\int_0^\eta u^p\phi_p(u)\,s_n^{(p)}(u)\,du$$

$$=\left(\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\eta}\right) u^p \phi_p (u)\ \overset{(p)}{s_n} (u)\, du$$

$$=L_1+L_2, \text{ माना}$$

पुन: (3·1) के प्रयोग करने से

$$L_1=O\ (n^{2\lambda+p+1}) \int_0^{1/n} u^p\ \phi_p(u)\ du$$

$$=O\ [n^{-\alpha} (\log n)^{\gamma}] \tag{4·8}$$

$$L_2=\int_{1/n}^{\eta} u^p \phi_p (u)\ \overset{(p)}{s_n} (u)\ du$$

$$-O\ (n^{\lambda+p+k}) \left[\int_{1/n}^{\eta} u^p \cdot \frac{1}{u^{k+\lambda+1}} \phi_p (u)\ du\right]$$

$$=O\ (n^{\lambda+p-k}) \left[\int_{1/n}^{\eta} u^{p-k-\lambda-1} \phi_p (u)\ du\right]$$

$$=O\ (n^{\lambda+p-k}) \left[u^{p-k-\lambda-1}\ u^{1+2\lambda+\alpha} \left(\log\frac{1}{u}\right)^{\gamma} - \int_{1/n}^{\eta} u^{p-k-\lambda-2}\ .\ u^{1+2\lambda+\alpha}\left(\log\frac{1}{n}\right)^{\gamma} du\right]$$

$$=O\ (n^{\lambda+p-k})+O\ [n^{-\alpha} (\log n)^{\gamma}],\ k\geqslant n+\lambda+\alpha.$$

4·6), (4·7), (4·8) तथा (4·9) को एकत्रित करने पर

$$\overset{k}{\sigma_n}-A=O[n^{-\alpha} (\log n)^{\alpha}],\ k\geqslant p+\lambda+\alpha.$$

अत: प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डा० जी० एस० पाण्डेय ने जो मार्गदर्शन एवं सहाय्य पहुँचाया उसके लिये लेखक उनका कृतज्ञ है ।

निर्देश

1. ओब्रेचकाफ, एम०, Rend. del Circl. Mat. di 1936, **59**, 266-87

2. गुप्ता डी० पी०, Boll. U. M. I. 1962, **17**, 166-71

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages, 243-252

दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिये कतिपय सान्त समाकल एवं फूरिए ज्या श्रेणी–I

आर० आर० महाजन तथा राजेन्द्र के० सक्सेना
गणित विभाग, वी० आर० सी० ई०, नागपुर

[प्राप्त—नवम्बर 4, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों के M-फलन वाले तीन सान्त समाकलों का मान ज्ञात किया गया है। आगे इन समाकलों को M-फलन हेतु फूरिए-ज्या-श्रेणी प्राप्त करने के लिये व्यवहृत किया गया है। कतिपय रोचक विशिष्ट दशाओं का भी उल्लेख हुआ है।

Abstract

Some finite integrals and Fourier sine series for a generalised function of two variables-I. *By* R. R. Mahajan and Rajendra K. Saxena, Department of Mathematics, V. R. C. E., Nagpur.

In the present paper three finite integrals involving M-function of two variables are evaluated. These integrals are further employed to obtain Fourier sine series for the M-function. Some interesting particular cases are also dealt with.

1. विषय प्रवेश :

प्रस्तुत प्रपत्र में आगत दो चरों वाला सार्वीकृत फलन मौर्य[1] द्वारा परिभाषित हुआ है और उसे निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जाता है :

$$M(x, y) \equiv M\left[\begin{array}{l|l|c} \begin{bmatrix} m_1, & n_1 \\ p_1-m_1, & q_1-n_1 \end{bmatrix} & \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, a_{p_1})\}; \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, \beta_{q_1})\} & x \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2 \end{pmatrix} & \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}; \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} & \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & p_3-n_3 \end{pmatrix} & \{(e_{p_3}, \epsilon_{p_3})\}; \{(f_{q_3}, \rho_{q_3})\} & y \end{array}\right] \tag{1·1}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} m(\xi,\eta)\,.\,x^{\xi}\,.\,y^{\eta}\,.\,d\xi\,.\,d\eta.$$

जहाँ $\{(a_p, \alpha_p)\}$ से $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \ldots, (a_p, \alpha_p)$ का बोध होता है एवं **(1·2)**

$m(\xi, \eta)$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi+\alpha_j\eta)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(b_j-\beta_j\xi-\beta_j\eta)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j\xi)}{\prod_{j=m_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi-\alpha_j\eta)\prod_{j=n_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi+\beta_j\eta)\prod_{j=m_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j\xi)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(d_j-\delta_j\xi)\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(1-e_j+\epsilon_j\eta)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(f_j-\rho_j\eta)}{\prod_{j=n_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j\xi)\prod_{j=m_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-\epsilon_j\eta)\prod_{j=n_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+\rho_j\eta)}$$

जहाँ p_i, q_i, m_i तथा $n_i (i=1, 2, 3)$ ऐसी अनृण संख्याएँ हैं कि $0\leqslant m_i\leqslant p_i$, $0\leqslant n_i\leqslant q_i$, a_j, b_j, c_j, d_j, e_j तथा f_j सम्मिश्र संख्याएँ हैं और α_j, β_j, γ_j, δ_j, ϵ_j तथा ρ_j धन वास्तविक संख्याएँ हैं।

$\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi+\alpha_j\eta)$, $\Gamma(1-c_j+\gamma_j\xi)$ एवं $\Gamma(1-c_j+\epsilon_j\eta)$ का कोई भी पोल क्रमशः $\Gamma(b_j-\beta_j\xi-\beta_j\eta)$, $\Gamma(d_j-\delta_j\xi)$ तथा $\Gamma(f_j-\rho_j\eta)$ के किसी भी पोल से संगमित नहीं होता।

L_1 तथा L_2 उपयुक्त कंटूर हैं।

X तथा Y शून्य के तुल्य नहीं हैं

तथा $x^{\xi}=\exp\{\xi(\log|x|+i\arg x)\}$;

$y^{\eta}=\exp\{\eta(\log|y|+i\arg y)\}$.

जिसमें $\log|x|$ तथा $\log|y|$ से $|x|$ एवं $|y|$ के प्राकृतिक लघुगणकों का संसूचन होता है।

(1·1) के दक्षिण पक्ष का समाकल निम्नांकित प्रतिबन्ध-समुच्चय के अन्तर्गत अभिसारी है (1·3)

(i) $$\mu_1\equiv\Big[\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_j-\sum_{j=m_1+1}^{p_1}\alpha_j+\sum_{j=1}^{n_1}\beta_j-\sum_{j=n_1+1}^{q_1}\beta_j+\sum_{j=1}^{m_2}\gamma_j-\sum_{j=m_2+1}^{p_2}\gamma_j+\sum_{j=1}^{n_2}\delta_j-\sum_{j=n_2+1}^{q_2}\delta_j\Big]>0$$

(ii) $$\mu_2\equiv\Big[\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_j-\sum_{j=m_1+1}^{p_1}\alpha_j+\sum_{j=1}^{n_1}\beta_j-\sum_{j=n_1+1}^{q_1}\beta_j+\sum_{j=1}^{m_3}\epsilon_j-\sum_{j=m_3+1}^{p_3}\epsilon_j+\sum_{j=1}^{n_3}\rho_j-\sum_{j=n_3+1}^{q_3}\rho_j\Big]>0$$

(iii) $\mu_3 \equiv \left[\sum_{j=1}^{q_1} \beta_j + \sum_{j=1}^{q_2} \delta_j - \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j - \sum_{j=1}^{p_2} \gamma_j \right] > 0$

(iv) $\mu_4 \equiv \left[\sum_{j=1}^{q_1} \beta_j + \sum_{j=1}^{q_3} \rho_j - \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j - \sum_{j=1}^{p_3} \right] > 0$

(v) $|\arg x| < \frac{1}{2}\mu_1\pi, \quad |\arg y| < \frac{1}{2}\mu_2\pi.$

प्रस्तुत प्रपत्र में संकेतन

$$M\left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} m_1, & n_1 \\ p_1-m_1, & q_1-n_1 \end{bmatrix} \\ \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \end{matrix}\left|\begin{matrix} \{(a_{p_1}: \alpha_{p_1}, \alpha_{p_1})\};\{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, \beta_{q_1})\} \\ \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{matrix}\right| \begin{matrix} x \\ \\ \\ y \end{matrix}\right]$$

का उपयोग यह दिखाने के लिये किया गया है कि ... द्वारा प्रदर्शित प्राचल (1·1) में आये $M(x, y)$ के ही प्राचलों जैसे हैं।

2. M-फलन की विशिष्ट दशायें :

दो चरों का M-फलन अत्यन्त व्यापक है और उपयुक्त रीति से प्राचलों के विशिष्टीकरण से यह पाठक[2] के P फलन, मुनोट[3] के H-फलन, अग्रवाल[4] के G-फलन, शर्मा[5] के S-फलन, ऐपेल[6] के F_1, F_2, F_3 तथा F_4 फलन, हार्न[7] के G_2 फलन में समानीत हो जाता है :

$$M\left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} m_1 & , & 0 \\ P_1-m_1, & & q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2 & , & n_2 \\ p_2-m_2, & & q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3 & , & n_3 \\ p_3-m_3, & & q_3-n_3 \end{pmatrix} \end{matrix}\left|\begin{matrix} \{1-a_{p_1}; 1, 1)\}; (1-b_{q_1}; 1, 1)\} \\ \{c_{p_2}, 1)\} \quad ; \quad \{(d_{q_2}, 1)\} \\ \{(e_{p_3}, 1)\} \quad ; \quad \{(f_{q_3}, 1)\} \end{matrix}\right| \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix}\right]$$

$$= S\left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} m_1 & , & 0 \\ p_1-m_1, & & q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2 & , & n_2 \\ p_2-m_2, & & q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3 & , & n_3 \\ p_3-m_3, & & q_3-n_3 \end{pmatrix} \end{matrix}\left|\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{p_1}; b_1, \ldots, b_{q_1} \\ c_1, \ldots, c_{p_2}; d_1 \ldots, d_{q_2} \\ e_1, \ldots, e_{p_3}; f_1, \ldots, f_{q_3} \end{matrix}\right| \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix}\right] \tag{2·1}$$

$$M\left[\begin{array}{c|lll|c} \begin{bmatrix}1, 0\\0, 1\end{bmatrix} & (1-\alpha; 1, 1); (1-\gamma; 1, 1) & & & x \\ \begin{pmatrix}1, 1\\0, 0\end{pmatrix} & (1-\beta, 1) & : & (0, 1) & \\ \begin{pmatrix}1, 1\\0, 0\end{pmatrix} & (1-\beta', 1) & ; & (0, 1) & y \end{array}\right] \tag{2·2}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)}\,.\,F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; -x, -y).$$

$$M\left[\begin{array}{c|ll|c} \begin{bmatrix}1, 0\\0, 0\end{bmatrix} & (1-\alpha; 1, 1); & & x \\ \begin{pmatrix}1, 1\\0, 1\end{pmatrix} & (1-\beta, 1) & ; (0, 1), (1-\gamma, 1) & \\ \begin{pmatrix}1, 1\\0, 1\end{pmatrix} & (1-\beta', 1) & ; (0, 1), (1-\gamma', 1) & y \end{array}\right] \tag{2·3}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}\,.\,F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; -x, -y).$$

$$M\left[\begin{array}{c|lll|c} \begin{bmatrix}0, 0\\0, 1\end{bmatrix} & \cdots & ; & (1-\gamma; 1, 1) & x \\ \begin{pmatrix}2, 1\\0, 0\end{pmatrix} & (1-\alpha, 1), (1-\beta, 1) & ; & (0, 1) & \\ \begin{pmatrix}2, 1\\0, 0\end{pmatrix} & (1-\alpha', 1)\ (1-\beta', 1) & ; & (0, 1) & y \end{array}\right] \tag{2·4}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}{\Gamma(\gamma)}\,.\,F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; -x, -y)$$

$$M\left[\begin{array}{c|ll|c} \begin{bmatrix}2, 0\\0, 0\end{bmatrix} & (1-\alpha; 1, 1), (1-\beta; 1, 1); & & \mathrm{x} \\ \begin{pmatrix}0, 1\\0, 1\end{pmatrix} & & (0, 1), (1-\gamma, 1) & \\ \begin{pmatrix}0, 1\\0, 1\end{pmatrix} & \cdots & ; (0, 1), (1-y', 1) & y \end{array}\right] \tag{2·5}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}\,.\,F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; -x, -y).$$

$$M\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}1, 1\\0, 0\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1, 1\\0, 0\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1+\beta-\alpha;\ 1,\ 1);\ (\beta,\ 1,\ 1)\\ (1,\ 1)\quad;\ (\beta+\beta',\ 1)\\ (1-\alpha',\ 1);\ (0,\ 1)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right] \tag{2·6}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta')}\cdot G_2(\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta';\ x,\ -y/x).$$

3. अनुभाग 4 तथा 5 के परिणामों की उपपत्ति के लिये निम्नांकित सूत्रों की आवश्यकता होगी

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{u-1}(\cos x)^{v-1}\cdot e^{i(u+v)x}\,dx=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}\cdot e^{iu\pi/2} \tag{3·1}$$

जहाँ $Re(u)>0$, $Re(v)>0$ जो सूत्र [8, p. 73, (2·3)]

$$\int_0^{\pi/2} e^{4mix}\cdot\sin(4nx)\,dx=\begin{cases}0 & \text{यदि } m\neq n,\ m=n=0\\ \dfrac{\pi i}{4} & \text{यदि } m=n\neq 0\end{cases} \tag{3·2}$$

है जो [9, p. 490] से अनुगमित है ।

4. समाकल :

हम निम्नांकित फलों की स्थापना करेंगे ।

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{u-1}(\cos x)^{v-1}\cdot e^{i(u+v)x}M(\,y(\sin x\cdot e^{ix})^h,\ z)\,dx. \tag{4·1}$$

$$=e^{iu\pi/2}\cdot\Gamma(v)\cdot M\left[\begin{matrix}\cdots\quad\cdots\\ \begin{pmatrix}m_2+1\ , & n_2\\ p_2-m_2, & q_2+1-n_2\end{pmatrix}\\ \cdots\quad\cdots\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\cdots\quad\cdots\\ (1-u,\ h)\quad,\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\}.\\ \{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\};\ (1-u-v,\ h)\}\\ \cdots\quad\cdots\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y\cdot e^{ih\pi/2}\\ \\ z\end{matrix}\right]$$

बशर्ते कि $h>0$, $Re(u+h\cdot d_j/\delta_j)>0$. $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_2$ एवं (1·2) के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं यदि x तथा y को क्रमशः y तथा z से प्रतिस्थापित कर दें ।

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{u-1}\cdot(\cos x)^{v-1}\cdot e^{i(u+v)x}\times M(y(\sin x)^{h_1}(\cos x)^{h_2}\,e^{i(h_1+h_2)x},\ z)\,dx \tag{4·2}$$

$$=e^{iu\pi/2}\,.\,M\left[\begin{matrix}\cdots & \cdots\\ \begin{pmatrix}m_2+2\,, & n_2\\ p_2-m_2, & q_2+1-n_2\end{pmatrix}\\ \cdots & \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}\cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ (1-u,\,h_2), \qquad \{(d_{q_2},\,\delta_{q_2})\},\\ (1-v,h_2)\,,\,\{c_{p_2},\,\gamma_{p_2})\};(1-u-v,h_1+h_2).\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}y\,.\,c^{ih_1\pi/2}\\ \\ \\ z\end{matrix}\right]$$

बशर्ते कि $h_1, h_2>0$, $Re\left(u+h_1\,.\,\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0$ $Re(v+h_1\,.\,d_j/\delta_j)>0$ क्योंकि $j=1, 2, \ldots, n_2$ तथा (1·2) के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं यदि x तथा y के स्थान पर क्रमशः y तथा z रखा जाय।

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{u-1}\,.\,(\cos x)^{v-1}\,.\,e^{i(u+v)x}\,.\,M(\,y(\tan x)^h,\,z)\,.\,dx \tag{4·3}$$

$$=\frac{e^{iu\pi/2}}{\Gamma(u+v)}\cdot M\left[\begin{matrix}\cdots & \cdots\\ \begin{pmatrix}m_2+1 & ,\,n_2+1\\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \cdots & \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ (1-u,\,h),\,\{(c_{p_2},\,\gamma_{p_2})\};\,(v,\,h),\{(d_{q_2},\,\delta_{q_2})\}.\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}y\,.\,e^{ih\pi/2}\\ \\ z\end{matrix}\right]$$

बशर्ते कि $h>0$, $Re\left(u+h\,.\,\frac{d_j}{\delta_j}\right)>0$, क्योंकि $j=1, 2, \ldots, n_2$, $Re\left(v+h\,.\,\frac{1-c_k}{\gamma_k}\right)>0$ क्योंकि $k=1, 2, \ldots, m_2$ तथा (1·2) के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं यदि x तथा y के स्थान पर क्रमशः y तथा z रखा जाय।

(4·1) की उपपत्ति

M-फलन हेतु द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल का प्रतिस्थापन करने तथा समाकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करने पर (5·1) का बाम पक्ष निम्नवत् होगा

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}m(\xi,\,\eta)\,y^{\xi}\,.\,z^{\eta}\,.\left(\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{u+h\xi-1}(\cos x)^{v-1}e^{i(u+v+h\xi)x}\,.\,dx\right)d\xi\,.\,d\eta$$

अब (3·1) के सम्प्रयोग तथा M-फलन के पदों में परिणाम की व्याख्या करने पर वांछित फल की प्राप्ति होती है।

(4·2) तथा (4·3) की उपपत्तियाँ (4·1) के ही समान हैं।

5. फूरिये ज्या श्रेणी :

निम्नांकित फूरिये ज्या श्रेणियों की स्थापना की गई है।

$$(\sin x)^{4u-1}\,.\,(\cos x)^{4v-1}\,.\,M(\,y(\cos x\,.\,e^{ix})^h,\,z).$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}c_r\,.\,\sin(4u+4r)x \tag{5·1}$$

जहाँ $0<x<\pi/2$

तथा $c_r = \frac{4}{\pi i} e^{izu\pi} \Gamma(4r)$

$$\times M\left[\begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \begin{pmatrix} m_2+1, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2+1-n_2 \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (1-4u,\ h), \quad \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}, \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\};\ (1-4u-4r,\ h). \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} y \,.\, e^{ih\pi/2} \\ \\ z \end{matrix}\right] \tag{5·2}$$

$$(\sin x)^{4u-1} \,.\, (\cos x)^{4v-1} \,.\, M(\ y(\sin\ x)^{h_1}(\cos\ x)^{h_2}\ e^{i(h_1+h_2)x},\ z).$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} c_r \,.\, \sin\,(4u+4r)x$$

जहाँ $0<x<\pi/2$

$$\text{तथा } c_r = \frac{4}{\pi i} \,.\, M\left[\begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \begin{pmatrix} m_2+2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2+1-n_2 \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (1-4u,\ h_1),\ (1-4r,\ h_2),\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}, \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}(1-4u-4r\ ,\ h_1+h_2) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} y \,.\, e^{ih_1\pi/2} \\ \\ z \end{matrix}\right]$$

$$(\sin\ x)^{4u-1} \,.\, (\cos\ x)^{4v-1} \,.\, M(\ y\ (\tan\ x)^h,\ z). \tag{5.3}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} c_r \,.\, \sin\,(4n+4r)x.$$

जहाँ $0<x<\pi/2$ तथा

$$c_r = \frac{4}{\pi i} \frac{e^{2\pi i}}{\Gamma(4u+4r)}$$

$$\times M\left[\begin{matrix} \cdots & \cdots \\ \begin{pmatrix} m_2+1, & n_2+1 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (1-4u,\ h),\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\};\ (4r,h),\ \{d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} y \,.\, e^{ih\pi/2} \\ \\ z \end{matrix}\right]$$

(5·1) की उपपत्ति :

माना कि

$$f(x) \equiv (\sin\ x)^{4n-1} \,.\, (\cos\ x)^{4v-1} \,.\, M(\ y(\sin x \,.\, e^{ix})^h,\ z).$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} c_r \,.\, \sin\,(4u+4r)x \tag{6·4}$$

जहाँ $0<x<\pi/2$

उपर्युक्त समीकरण वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और $(0, \pi/2)$ में परिबद्ध विचरणशील है। (5·4) के दोनों पक्षों को $e^{i(4u+4v)x}$ से गुणा करते हैं और 0 से $\pi/2$ तक x के प्रति समाकलित करते हैं। अब (4·2) के सम्प्रयोग से

$$c_r = \frac{4}{\pi i} e^{i2u\pi} \Gamma(4r)$$

$$\times M\left[\begin{matrix} \dots \quad \dots \\ \binom{m_2+1\ , \qquad n_2}{p_2-m_2,\ q_2+1-n_2} \\ \dots \quad \dots \end{matrix}\left|\begin{matrix} \dots \quad \dots \quad \dots \\ (1-4u, h), ()c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}; \begin{matrix}\{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}, \\ (1-4u-4r, h).\end{matrix} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{matrix}\right|\begin{matrix} y \, . \, e^{ih\pi/2} \\ \\ z \end{matrix}\right]$$

(5·4) में इस मान को रखने पर वांछित परिणाम मिलता है। इसी प्रकार से (5·2) तथा (5.3) भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

6· (4·1) की विशिष्ट दशायें

$h=1$ रखने पर तथा प्राचलों के उपयुक्त विशिष्टीकरण से तथा (2·1) के सम्प्रयोग से हमें (4·1) से इसकी विशिष्ट दशा के रूप में निम्नलिखित फल प्राप्त होता है

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} \, . \, (\cos x)^{v-1} \, . \, e^{i(u+v)x} \, . \, S(y \sin x \, . \, e^{ix}, z) \, . \, dx \tag{6·1}$$

$$= e^{iu\pi/2} \Gamma(v)$$

$$\times S\left[\begin{matrix} \dots \quad \dots \\ \binom{m_2+1\ , \qquad n_2}{p_2-m_2,\ q_2+1-n_2} \\ \dots \quad \dots \end{matrix}\left|\begin{matrix} \dots \quad \dots \quad \dots \\ 1-u, c_1, \dots, c_{p_2}; d_1, \dots, d_{q_2}, 1-u-v \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{matrix}\right|\begin{matrix} y \cdot e^{i\pi/2} \\ \\ s \end{matrix}\right]$$

$h=1$, $\beta = u+v$ रखने एवं प्राचलों के उपयुक्त विशिष्टीकरण से (2·2) का सम्प्रयोग करने पर (4·1) से इसकी विशिष्ट दशा के रूप में निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} \, . \, (\cos x)^{v-1} \, . \, e^{i(u+v)x} \, . \, F_1(\alpha, u+v, \beta', \gamma; \, -y \sin x \, . \, e^{ix}, z) \, dx.$$

$$= \frac{e^{iu\pi/2}\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} F_1(\alpha, u, \beta', \gamma; \, -ye^{i\pi/2}, -z). \tag{6·2}$$

इसी प्रकार (4·3) के सम्प्रयोग से (4·1) से F_2 वाला परिणाम इसकी विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त होता है।

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} . (\cos x)^{v-1} . e^{i(u+v)x} . F_2(\alpha, u+v, \beta', \gamma, \gamma'; -y \sin x . e^{ix}, -z)\, dx$$

$$= \frac{e^{iu\pi/2}\, \Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} F_2(\alpha, u, \beta', \gamma, \gamma'; -ye^{i\pi/2}, -z). \tag{6·3}$$

(2·4) के सम्प्रयोग से थोड़े सरलीकरण के पश्चात् हमें (4·1) से (6·4) प्राप्त होता है

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} . (\cos x)^{v-1} . e^{i(u+v)x} . F_3(\alpha, \alpha', u+v, \beta', \gamma; -y \sin x . e^{ix}, z)\, dx$$

$$= \frac{e^{iu\pi/2}\, \Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} F_3(\alpha, \alpha', u, \beta', \gamma; -ye^{i\pi/2}, -z). \tag{6·4}$$

(2·5) के सम्प्रयोग से तथा $h=1$, $\gamma=u$ रखने पर (4·1) से (6·5) प्राप्त होता है

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} . (\cos x)^{v-1} . e^{i(u+v)x} . F_4(\alpha, \beta, u, \gamma'; -y \sin xe^{ix}, -z)\, dx$$

$$= \frac{e^{iu\pi/2}\, \Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} . F_4(\alpha, \beta. u+v, \gamma'; -ye^{i\pi/2}, -z). \tag{6·5}$$

(2·6) के सम्प्रयोग से तथा $\beta'=1-\mu-\beta$, $h=1$ इत्यादि रखने पर (5·1) से हमें (6·6) प्राप्त होगा

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} . (\cos x)^{v-1} . e^{i(u+v)x}$$

$$\times G_2\left(\alpha,\alpha', \beta, 1-u-\beta; y \sin x . e^{ix}, -\frac{z}{y \sin x\, e^{ix}}\right) . dx$$

$$= \frac{e^{i\pi/2}\Gamma(v)\Gamma(u+\beta)}{\Gamma(u+v+\beta)} \times G_2\left(\alpha, \alpha', \beta, 1-u-v-\beta; ye^{i\pi/2}, -\frac{z}{ye^{i\pi/2}}\right). \tag{6·6}$$

यही नहीं $p_1=m_1=q_1=n_1=0$ रखने तथा M-फलन को फाक्स के दो H-फलन के गुणनफलन के रूप में व्यक्त करने पर थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् (4·1) से चौधरी[10] का परिणाम इसकी विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त होता है ।

इसी प्रकार S, F_1, F_2, F_3, F_4, G_2 वाले परिणाम (4·2) तथा (4·3) से इसकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं ।

निर्देश

1. मौर्य, डी० पी०, **पी-एच० डी० थीसिस, इन्दौर विश्वविद्यालय, इन्दौर,** 1970
2. पाठक, आर० एस०, **बुले० कल० मैथ० सोसा०**, 1972, **62**, 97-106.
3. मुनोट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, Separate De La Revista, Mathematics Y. Fisica Theorica 1971, **21.**

4. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1965, **30**, 536-46.

5. शर्मा, बी० एल०, Anna de la soc. Sc. de Brux. 1965, **T791**, 26-40.

6. ऐपेल, ए कैम्पे द-फेरी, Functions hypergeometriqueset hyperspheriques polynomes d' Hermite **गाथर विलर्स, पेरिस,** 1926.

7. हार्न, जे०, Math. Ann. 1931, **105**, 381-407.

8. हान, डी० बी० डी० ई०, Nourelles D' integrals defines **हैपनर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क** 1957.

9. लिरिज्क, आई० एम० तथा ग्रैडश्टेज्न, आई० एस०, Tables of Series, Products and Integrals, **मास्को**

10. चौधरी, के० एल०, The Mathematic Education, Siwan (Bihar), 1975, **9**, 33-56.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages 253-262

सार्वीकृत लागेर बहुपदों वाले कतिपय फल

सी० के० शर्मा
गणित विभाग, एस० एस० एल० टी०, पी० वी० एम०, परसिया

[प्राप्त—जून 14, 1976]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में दो चरों वाले माइजर को G-फलन एवं लागेर बहुपद वाले समाकल का मान ज्ञात किया गया है एवं दो चरों वाले G-फलन के प्रसार सूत्र का मान निकालने में इस समाकल का उपयोग किया गया है। कई विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

On some results involving generalized Laguerre polynomials. *By* C. K. Sharma, Department of Mathematics S. S. L. T., P. V. M., Parasia.

In this paper the integral involving the Meijer's G-function of two variables and the Laguerre polynomial has been evaluated and the expansion formula for the G-function of two variables has been evaluated with the application of this integral. Many particular results have also been given.

1. प्रस्तावना

हाल ही में अग्रवाल[3] ने दो चरों वाले G-फलन की परिभाषा दी है जिसमें विशिष्ट दशाओं के रूप में न केवल माइजर के G-फलन अथवा दो G-फलनों का गुणनफल पाया जाता है वरन दो चरों में सर्वाधिक प्रयुक्त फलन भी सम्मिलित है—यथा ऐपेल फलन F_1, F_2, F_3 तथा F दो चरों वाला व्हिटेकर फलन। फलस्वरूप इस प्रपत्र में स्थापित किये गये फल व्यापक प्रकृति के हैं और कई रोचक दशायें निहित हैं।

अग्रवाल[1] के फलस्वरूप दो चरों वाले माइजर के G-फलन को सम्बन्ध (1·1) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$G^{n,\, v_1,\, v_2,\, m_1,\, m_2}_{p,\, (t\,:\,t'),\, s,\, (q\,:\,q')}\left[\begin{array}{c|l} x & (\epsilon_p) \\ & (\gamma_t);\,(\gamma'_{t'}) \\ y & (\delta_s) \\ & (\beta_q);\,(\beta'_{q'}) \end{array}\right]=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty}\phi(\xi+\eta)\psi(\xi,\eta)\,x^{\xi}\,y^{\eta}\,d\xi\,d\eta, \quad (1\cdot1)$$

जहाँ

$$\phi(\xi+\eta)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\surd\{(1-\epsilon_j+\xi+\eta)\}}{\prod\limits_{j=n+1}^{p}\surd\{(\epsilon_j-\xi-\eta)\}\prod\limits_{j=1}^{s}\surd\{(\delta_j+\xi+\eta)\}},$$

$$\psi(\xi,\eta)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m_1}\surd\{(\beta_j-\xi)\}\prod\limits_{j=1}^{v_1}\surd\{(\gamma_j+\xi)\}\prod\limits_{j=1}^{m_2}\surd\{(\beta'_j-\eta)\}\prod\limits_{j=1}^{v_2}\surd\{(\gamma'_j+\eta)\}}{\prod\limits_{j=m_1+1}^{q}\surd\{(1-\beta_j+\xi)\}\prod\limits_{j=v_1+1}^{t}\surd\{(1-\gamma_j-\xi)\}\prod\limits_{j=m_2+1}^{q'}\surd\{(1-\beta'_j+\eta)\}\prod\limits_{j=v_2+1}^{t'}\surd\{(1-\gamma'_j-\eta)\}},$$

तथा $0\leqslant m_1\leqslant q,\ 0\leqslant m_2\leqslant q',\ 0\leqslant v_1\leqslant t,\ 0\leqslant v_2\leqslant t',\ 0\leqslant n\leqslant p.$

$(\beta_{m_1}), (\beta'_{m_2}), (\gamma_{v_1}), (\gamma'_{v_2})$ तथा (ϵ_n) प्राचलों का ऐसा अनुक्रम है कि समाकल्य का एक भी पोल संगमी नहीं है। समाकलन के पथ आवश्यकता पड़ने पर इस प्रकार से दंतुरित किये जाते हैं कि $\surd\{(\beta_j-\xi)\}, j=1, 2, \ldots, m_1$ तथा $\surd\{(\beta'_k-\eta)\}$,$k=1, 3, \ldots, m_2$ के समस्त पोल काल्पनिक अक्ष के दाहिनी ओर तथा $\surd\{(\gamma_j+\xi)\},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ v_1,\ \surd\{(\gamma'_k+\eta)\},\ k=1,\ 2. \ldots,\ v_2$ एवं $\surd\{(1-\epsilon_j+\xi+\eta)\}, j=1, 2, \ldots, n,$के पोल बाईं ओर पड़ें।

समाकल (1·1) अभिसारी होता है यदि

$$\left\{\begin{array}{l} p+q+s+t<2(m_1+v_1+n), \\ p+q'+s+t'<2(m_2+v_2+n), \\ \text{तथा} \\ |\arg x|<\pi[m_1+v_1+n-\tfrac{1}{2}(p+q+s+t)], \\ |\arg y|<\pi[m_2+v_2+n-\tfrac{1}{2}(p+q'+s+t')]. \end{array}\right. \quad (1\cdot2)$$

$G\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ का आचरण x तथा y के लघु मानों के लिये

$G\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=O(|x|^{\beta_j}\,|y|^{\beta'_j})$ द्वारा दिया जाता है जहाँ $j=1, 2, \ldots, m_1$ तथा $k=1, 2, \ldots, m_2$.

इसी प्रकार जब x तथा $y \to \infty$ तो सम्बद्ध फलन $G^{(1)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ जो $G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ की दशा $n=0$ के संगत है, उसका आचरण

$$G^{(1)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0\,(|\,x\,|^{-\gamma_j}\,|\,y\,|^{-\gamma'_k}), \tag{1·4}$$

होता है जहाँ $j=1, 2, \ldots, \nu_1$ तथा $k=1, 2, \ldots, \nu_2$.

प्रस्तुत प्रपत्र में इस एक अनन्त समाकल का मान ज्ञात करेंगे और इसका उपयोग सार्वीकृत फलन वाले एक प्रसार सूत्र की प्राप्ति के लिये करेंगे जिसमें से कई फल विशिष्ट दशा के रूप में हैं।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित समाकल का मान ज्ञात किया जायेगा

$$\int_0^\infty x^\gamma e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x)\; G^{n,\, \nu_1,\, \nu_1,\, m_1,\, m_2}_{p,\, (t\,:\,t'),\, s,\, (q\,:\,q')}\left[\begin{matrix} ux^\delta \\ \\ vx^\delta \end{matrix}\left|\begin{matrix} (\epsilon_p) \\ (\gamma_t);\ (\gamma'_{t'}) \\ (\delta_s) \\ (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{matrix}\right.\right] dx \tag{2·1}$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!}(2\pi)^{1/2(1-\delta)}\delta^{\gamma+k+1/2}\, G^{n+2\delta,\, \nu_1,\, \nu_2,\, m_1,\, m_2}_{p+2\delta,\, (t\,:\,t'),\, s+\delta,\, (q\,:\,q')}\left[\begin{matrix} u\delta^\delta \\ \\ v\delta^\delta \end{matrix}\left|\begin{matrix} \triangle(\delta, -\gamma)\ \triangle(\delta, \sigma-\gamma),, (\epsilon_p) \\ (\gamma_t);\ (\gamma'_{t'}) \\ \triangle(\delta, 1-\sigma+\gamma-k),\ (\delta_s) \\ (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{matrix}\right.\right],$$

जहाँ δ धन पूर्णांक है, $R[\gamma+1+\delta(\beta_j+\beta'_k)]>-1(j=1, 2, \ldots, m_1;\ k=1, 2, \ldots 1, 2, \ldots, m_2)$,

$$p+q+s+t<2(m_1+\nu_1+n+\tfrac{1}{2}\delta),$$

$$p+q'+s+t'<2(m_2+\nu_2+n+\tfrac{1}{2}\delta),$$

तथा

$$|\arg u\,|<\pi[m_1+\nu_1+n+\tfrac{1}{2}\delta-\tfrac{1}{2}(p+q+s+t)],$$

$$|\arg v\,|<\pi[m_2+\nu_2+n+\tfrac{1}{2}\delta-\tfrac{1}{2}(p+q'+s+t')]$$

तथा पूर्ववत् $\triangle(\delta, \alpha)\delta$ प्राचलों के समुच्चय $\frac{\alpha}{\delta}, \ldots, \frac{\alpha+\delta-1}{\delta}$. के लिये प्रयुक्त है।

उपपत्ति

(2·1) को सिद्ध करने के लिये हम समाकल्य में दो चरों वाले G-फलन को द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल (1·1) के रूप में व्यक्त करते हैं, समाकलन के क्रम को बदलते हैं जो (2·1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है तो

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty}\phi(\xi+\eta)\psi(\xi,\ \eta)u^{\xi}v^{\eta}\,d\xi\,d\eta\left[\int_0^{\infty}x^{\gamma+\delta\xi+\delta\eta}\ \ e^{-x}\,L_k^{(\sigma)}\ (x)\,dx\right].$$

अब x-समाकल का मान ज्ञात फल [3, p. 292(1)] की सहायता से निकालने पर

$$\int_0^{\infty}x^{\beta-1}\,e^{-x}\,L_n^{(\alpha)}\ (x)\,dx=\frac{\surd\{(\alpha-\beta+n+1)\surd\{(\beta)\}}{n!\ \surd\{(\alpha-\beta+1)\}},\ R(\beta)>0,$$

तथा निम्नांकित सम्बन्धों

$$(\alpha)_n=\frac{\surd\{(\alpha+n)\}}{\surd\{(1-\alpha)\}},\ \ \frac{\surd\{(1-\alpha-n)\}}{\surd\{(1-\alpha)\}}=\frac{(-1)^n}{(\alpha)_n},$$

एवं गामा फलन [4, p. 26] के लिये गॉस गुणन सूत्र का प्रयोग करने पर यह निम्न रूप में समानीत होता है।

$$\frac{(-1)^k}{k!}\,(2\pi)^{1/2(1-\delta)}\ \delta^{\gamma+k+1/2}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty}\phi(\xi+\eta)\psi(\xi,\ \eta)$$

$$\times\frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\surd\left\{\left(\frac{1+\gamma+i}{\delta}+\xi+\eta\right)\right\}\prod_{j=0}^{\delta-1}\surd\left\{\left(\frac{1-\sigma+\gamma+i}{\delta}+\xi+\eta\right)\right\}}{\prod_{j=0}^{\delta-1}\surd\left\{\left(\frac{1-\sigma+\gamma-k+i}{\delta}+\xi+\eta\right)\right\}}\ \delta^{\delta\xi+\delta\eta}\ u\xi v^{\eta}\ d\xi\ d\eta$$

दो चरों वाले G-फलन की परिभाषा (1·1) से समाकल (2·1) का मान निकल आता है।

3. इस अनुभाग में लागेर बहुपद की श्रेणी में दो चरों वाले G-फलन के प्रसार सूत्र की स्थापना समाकल (2·1) की सहायता से की जावेगी। जिस प्रसार सूत्र की स्थापना की जानी है वह है:

$$x^{\gamma}\,G^{n,\ v_1,\ v_2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ (t\ :\ t'),\ s,\ (q\ :\ q')}\left[\begin{array}{c|l} ux^{\delta} & (\epsilon_p) \\ & (\gamma_t);\ (\gamma't') \\ vx^{\delta} & (\delta_s) \\ & (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{array}\right] \tag{3·1}$$

$$=(2\pi)^{1/2(1-\delta)}\ \delta^{\gamma+\sigma+1/2}\ \sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\ \delta^r}{\surd\{(\sigma+r+1)\}}$$

$$\times G^{n+2\delta,\ v_1,\ v_2,\ m_1,\ m_2}_{p+2\delta,\ (t\ :\ l\ t'),\ s+\delta,\ (q\ :\ q')}\left[\begin{array}{c|l} u\delta^{\delta} & \triangle(\delta,\ -\gamma-\sigma),\ \triangle(\delta,\ -\gamma),\ (\alpha_p) \\ & (\gamma_l);\ (\gamma'_{t'}) \\ v\delta^{\delta} & \triangle(\delta,\ 1+\gamma-r),\ (\delta_s) \\ & (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{array}\right]L_r^{(\sigma)}\ (x\,),$$

जहाँ δ धन पूर्णांक है $R[\gamma+1+\delta(\beta_j+\beta'+\beta'_k)]>-1 (j=1, 2, \ldots, m_1; k=1, 2, \ldots, m_2)$,

$$p+q+s+t<2(m_1+v_1+n+\tfrac{1}{2}\delta),$$
$$p+q'+s+t'<2(m_2+v_2+n+\tfrac{1}{2}\delta),$$

तथा

$$|\arg u|<\pi[m_1+v_1+n+\tfrac{1}{2}\delta-\tfrac{1}{2}(p+q+r+s+t),$$
$$|\arg v|<\pi[m_2+v_2+n+\tfrac{1}{2}\delta-\tfrac{1}{2}(p+q'+s+t')].$$

उपपत्ति

माना कि

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=x^{\gamma}\, G^{n,\, v_1,\, v_2,\, m_1,\, m_2}_{p,\, (t\,:\,t'),\, s,\, (q\,:\,q')}\left[\begin{matrix} ux^{\delta} \\ vx^{\delta} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (\epsilon_p) \\ (\gamma_t);\ (\lambda'_{t'}) \\ (\delta_s) \\ (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{matrix}\right]=\sum_{r=0}^{\infty} C_r\, L_r^{(\sigma)}(x)\ (0<x<\infty), \\ L_r^{(\sigma)}(x)&=\frac{(1+\sigma)_r}{r!}\ {}_1F_1\left[\begin{matrix}-r\\1+\sigma\end{matrix};x\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot2)$$

यहाँ $L_r^{(\sigma)}(x)$ लागेर बहुपद है। समीकरण (3·1) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(0, \infty)$ में वद्ध विचरण वाला है।

अब (3·2) के दोनों पक्षों में $x^{\sigma} e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x)$ से गुणा करते हैं तथा 0 से ∞ तक x के प्रति समाकलित करते हैं। दाहिने पक्ष में समाकलन तथा संकलन क्रम को परिवर्तित करने पर (जो वैध है)

$$\int_0^{\infty} x^{\gamma+\sigma} e^{-x}\, L_k^{(\sigma)}(x)\, G^{n,\, v_1\, v_2,\, m_1,\, m_2}_{p,\, (t\,:\,t'),\, s,\, (q\,:\,q')}\left[\begin{matrix} ux^{\delta} \\ vx^{\delta} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (\epsilon_p) \\ (\gamma_t);\ (\gamma'_{t'}) \\ (\delta_s) \\ (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{matrix}\right] dx$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} C_r \int_0^{\infty} t^{\sigma} e^{-x}\, L_k^{(\sigma)}(x)\, L_r^{(\sigma)}(x)\, dx.$$

दाहिने पक्ष में लागेर बहुपदों के लाम्बिकता गुण का उपयोग [3, p. 292 (2)] करने पर

$$\int_0^{\infty} x^{a}\, e^{-x} \left[L_n^{(a)}(x)\right]^2 dx=\frac{\surd\{(a+n+1)\}}{n!},\ R(a)>0,$$

तथा बाँवें पक्ष में (2·1) की सहायता से समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$C_k=\frac{(-1)^k(2\pi)^{1/2(1-\delta)}\,\delta^{\gamma+\sigma+k+1/2}}{\sqrt{\{(\sigma+k+1)\}}}$$

$$\times G^{n+2\delta,\ v_1,\ v_2,\ m_1,\ m_2}_{p+2\delta,\ (t\ :\ t'),\ s+\delta,\ (q\ :\ q')}\left[\begin{array}{c|l} u\delta^\delta & \triangle(\delta,\ -\gamma-\sigma),\ \triangle(\delta,\ -\gamma),\ (\epsilon_p) \\ & (\gamma_t);\ (\gamma'_{t'}) \\ v\delta^\delta & \triangle(\delta,\ 1+\gamma-k),\ (\delta_s) \\ & (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{array}\right]. \quad (3{\cdot}3)$$

(3·2) तथा (3·3) का सहायता से प्रसार सूत्र (3·1) प्राप्त होता है ।

4. सम्प्रयोग

प्राचलों को ठीक से सेट करने पर समाकल में आये दो चरों का G-फलन तथा अनुभाग 2 तथा 3 में स्थापित प्रसार सूत्र में कई ज्ञात विशिष्ट फलन प्राप्त होंगे । कतिपय रोचक दशायें दी जा रही हैं ।

$\delta=1$ पर (2·1) तथा (3·1) की विशिष्ट दशायें

(A) $p=s=0=n$ रखने पर (1·1) का द्विगुण समाकल गुणनफल

$$G^{m_1,\ v_1}_{t,\ q}\left(x\ \middle|\ \begin{array}{c}\{1-(\gamma_t)\}\\(\beta_q)\end{array}\right)\ G^{m_2,\ v_2}_{t',\ q'}\left(y\ \middle|\ \begin{array}{c}\{1-(\gamma'_{t'})\}\\(\beta'_{q'})\end{array}\right)$$

में टूट जाता है । (2·1) तथा (3·1) से हमें

$$\int_0^\infty x^\gamma e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x)\, G^{m_1,\ v_1}_{t,\ q}\left(ux\middle|\begin{array}{c}(\gamma_t)\\(\beta_q)\end{array}\right) G^{m_2,\ v_2}_{t',\ q'}\left(vx\middle|\begin{array}{c}(\gamma'_{t'})\\(\beta'_{q'})\end{array}\right)dx$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!}\,G^{2,\ n_1,\ v_2,\ m_1,\ m_2}_{2,\ (t\ :\ t'),\ 1,\ (q\ :\ q')}\left[\begin{array}{c|l} & -\gamma,\ \sigma-\gamma \\ u & \{1-(\gamma_t)\},\ \{1-(\gamma'_{n'})\} \\ v & 1-\sigma+\gamma-k \\ & (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{array}\right], \quad (4{\cdot}1)$$

$$x^\gamma\, G^{m_1,\ v_1}_{t,\ q}\left(ux\middle|\begin{array}{c}(\gamma_t)\\(\beta_q)\end{array}\right) G^{m_2,\ v_2}_{t',\ q'}\left(vx\middle|\begin{array}{c}(\gamma'_{t'})\\(\beta'_{q'})\end{array}\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^\gamma}{\sqrt{\{(\sigma+y+1)\}}}\,G^{2,\ v_1,\ v_2,\ m_1,\ m_2}_{2,\ (t\ :\ t'),\ 1,\ (q\ :\ q')}\left[\begin{array}{c|l} & -\gamma-\sigma,\ -\gamma \\ u & \{1-(\gamma_t)\},\ \{1-(\gamma'_{t'})\} \\ v & 1+\gamma-r \\ & (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{array}\right] L_r^{(\sigma)}(x), \quad (4{\cdot}2)$$

प्राप्त होते हैं जो उन्हीं प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है जैसा कि (2·1) तथा (2·3) में $p=s=0=n$ होने पर ।

(*B*) दूसरी ओर, चूँकि

$$\lim_{y\to 0} G^{p,\ v_1,\ 0,\ m_1,\ 1}_{p,\ (t\ :\ 0),\ s,\ (q\ :\ 1)} \left[\begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix}\left|\begin{matrix} (\epsilon_p) \\ (\gamma_t);\ \ldots \\ \\ (\delta_s) \\ (\beta_q);\ 0 \end{matrix}\right.\right] = G^{m_1,\ p+v_1}_{p+t,\ s+q}\left(x \left| \begin{matrix} (\epsilon_p),\ \{1-(\gamma_t)\} \\ (\beta_q),\ \{1-\delta_s)\} \end{matrix}\right.\right),$$

(2·1) तथा (3·1) की विशिष्ट दशायें $p=t'=s=m_2-1=q'-1$ होने से उत्तम सूत्र

$$\int_0^\infty x^\gamma\, e^{-x}\, L_k^{(\sigma)}(x)\, G^{m_1,\ v_1}_{t,\ q}\left(ux \left| \begin{matrix} \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_t \\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q \end{matrix}\right.\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!}\, G^{m_1,\ v_1+2}_{t+2,\ q+1}\left(u \left| \begin{matrix} -\gamma,\ \sigma-\gamma,\ \ldots,\ \gamma_t \\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q,\ \sigma-\gamma+k \end{matrix}\right.\right), \qquad (4·3)$$

$$x^\gamma\, G^{m_1,\ v_1}_{t,\ q}\left(ux \left| \begin{matrix} \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_t \\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q \end{matrix}\right.\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)_r}{\sqrt{(\sigma+r+1)}}$$

$$\times G^{m,\ v_1+2}_{t+2,\ q+1}\left(u \left| \begin{matrix} -\gamma-\rho,\ -\gamma,\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_t \\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q,\ -\gamma+r \end{matrix}\right.\right) L_r^{(\sigma)}(x), \qquad (4·4)$$

मिलते हैं जहाँ $t+q=2(m_1+v_1+\frac{1}{2})$, $|\arg u|<\pi[m_1+v_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p+q)]$, $\times R(\gamma+1+\beta_j)>-1$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m_1)$.

अब (4·3) तथा (4·4) में प्राचलों को उपयुक्त मान प्रदान करने पर हमें (2·1) तथा (3·1) की विशिष्ट दशायें प्राप्त होती हैं जो निम्नवत् हैं:

(i) m_1, v_1, t, q के स्थान पर क्रमशः t, 1, $q+1$, t रखने एवं [2, p. 215 (2)] को दृष्टि में रखते हुये प्राचलों का उपयुक्त समंजन करने पर

$$\int_0^\infty x^\gamma\, e^{-x}\, L_k^{(\sigma)}(x)\, E(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_t;\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q,\ ux)\, dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!}\, G^{t,\ 3}_{q+3,\ t+1}\left(u \left| \begin{matrix} -\gamma,\ \sigma-\gamma,\ 1,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q \\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_t,\ \sigma-\gamma+k \end{matrix}\right.\right), \qquad (4·5)$$

$$x^\gamma\, E(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_t;\ \beta_1.\ \ldots.\ \beta_q;\ ux) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\sqrt{\{(\sigma+r+1)\}}}$$

$$\times G^{t,\ 3}_{q+3,\ t+1}\left(u \left| \begin{matrix} -\gamma-\sigma,\ -\gamma,\ 1,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q \\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_t,\ -\gamma+r \end{matrix}\right.\right) L_\gamma^{(\sigma)}(x), \qquad (4·6)$$

जहाँ $q-t+1\leqslant 0, t-q+1\equiv\lambda>0$, $|\arg u|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ तथा $R(\gamma+1+\gamma_j)>-1(j=1, 2, \ldots, t)$.

(ii) $m_1=q=2$, $\nu_1=t=0$, $\beta_1=\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\nu$, $\beta_2=\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\nu$ रखने एवं [2, p. 219 (47)] को दृष्टि में रखने पर

$$\int_0^\infty x^{\gamma+1/2l} e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x) k_\nu[2\sqrt{(ux)}]\, dx = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{u^{-1/2l}}{2} G_{22}^{22}\left(u \,\middle|\, \begin{matrix} -\gamma, \sigma-\gamma \\ \frac{1}{2}l\pm\frac{1}{2}\nu, \sigma-\gamma+k \end{matrix}\right) \quad (4\cdot 7)$$

$$2x^{\gamma+1/2l} u^{1/2l} k_\nu[2\sqrt{(ux)}] = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\sqrt{(\sigma+r+1)}} G_{23}^{22}\left(u \,\middle|\, \begin{matrix} -\gamma-\sigma, -\gamma \\ \frac{1}{2}l\pm\frac{1}{2}\nu, -\gamma+r \end{matrix}\right) L_r^{(\sigma)}(x), \quad (4\cdot 8)$$

जहाँ $|\arg u|<\pi$ तथा $R[\gamma+1+(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\nu)]>-1$.

(iii) $m_1=q=2$, $\nu_1=0$, $t=1$, $\gamma_1=l-\lambda+1$, $\beta_1=\frac{1}{2}+l+\mu$, $\beta_2=\frac{1}{2}+l-\mu$ रखने तथा [2, p. 216 (6)] का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty x^{\gamma+l} e^{-x-1/2ux} L_k^{(\sigma)}(x) W_{\lambda,\mu}(ux)\, dx = \frac{(-1)^k u^{-l}}{k!} G_{33}^{22}\left(u \,\middle|\, \begin{matrix} -\gamma, \sigma-\gamma, l-\lambda+1 \\ \frac{1}{2}+l\pm\mu, \sigma-\gamma+k \end{matrix}\right), \quad (4\cdot 9)$$

$$x^{\gamma+1} u^l e^{-1/2ux} W_{\lambda,\mu}(ux) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\sqrt{(\sigma+r+1)}} G_{33}^{22}\left(u \,\middle|\, \begin{matrix} -\gamma-\sigma, -\gamma, l-\lambda+1 \\ \frac{1}{2}+l\pm\mu, -\gamma+r \end{matrix}\right) L_\gamma^{(\sigma)}(x), \quad (4\cdot 10)$$

जहाँ $|\arg u|<\frac{1}{2}\pi$ तथा $R[\gamma+1+(\frac{1}{2}+l\pm\mu)]>-1$

(iv) $m_1=q=4$, $\nu_1=0$, $t=2$, $\gamma_1=\frac{1}{2}+a$, $\gamma_2=\frac{1}{2}-a$, $\beta_1=0$, $\beta_2=\frac{1}{2}$, $\beta_3=b$, $\beta_4=-b$ रखने तथा [2, p. 218 (38) को दृष्टि में रखने पर

$$\int_0^\infty x^{\gamma-1/2} e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x) W_{a,b}[2\sqrt{(ux)}] W_{-a,b}[2\sqrt{(ux)}]\, dx$$
$$= \frac{(-1)^k u^{\gamma_2} \pi^{-1/2}}{k!} G_{45}^{42}\left(u \,\middle|\, \begin{matrix} -\gamma, \sigma-\gamma, \frac{1}{2}\pm a \\ 0, \frac{1}{2}, b, -b, \sigma-\gamma+k \end{matrix}\right) \quad (4\cdot 11)$$

$$x^{\gamma-1/2}\pi^{1/2}u^{-1/2} W_{a,b}[2\sqrt{(ux)}] W_{-a,b}[2\sqrt{(ux)}]$$
$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\sqrt{(\sigma+r+1)}} G_{45}^{42}\left(n \,\middle|\, \begin{matrix} -\gamma-\sigma, -\gamma, \frac{1}{2}\pm a \\ 0, \frac{1}{2}, \pm b, -\gamma+r \end{matrix}\right) L_\gamma^{(\sigma)}(x), \quad (4\cdot 12)$$

जहाँ $|\arg u|<\frac{1}{2}\pi$ तथा $R[\gamma+1\pm(b)]>-1$.

(v) $m_1=2$, $q=3$, $\nu_1=t=1$, $\gamma_1=\frac{1}{2}$, $\beta_1=0$, $\beta_2=0$, $\beta_3=-a$ रखने तथा [2, p. 218 (26)] का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty x^\gamma e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x) I_a[\sqrt{(\mu x)}] K_a[\sqrt{(ux)}] = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2\sqrt{(\pi)}} G_{34}^{23}\left(u \middle| \begin{matrix} -\gamma, \sigma-\gamma, \frac{1}{2} \\ a, 0, -a, \sigma-\gamma+n \end{matrix}\right) \quad (4\cdot13)$$

$$2\sqrt{(\pi)}\, x^\gamma I_a[\sqrt{(ux)}] K_a[\sqrt{(\mu x)}] = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r}{\sqrt{(\sigma+r+1)}} \times G_{34}^{23}\left(u \middle| \begin{matrix} -\gamma-\sigma, -\gamma, \frac{1}{2} \\ a, 0, -a, -\gamma+r \end{matrix}\right) L_r^{(\sigma)}(x), \quad (4\cdot14)$$

जहाँ $|\arg u| < \pi$ तथा $R(\gamma+1\pm a) >=$

(vi) m_1, v_1, q के स्थान पर क्रमशः $1, t, q+1$ रखने पर तथा श्रेणी

$$G_{t,\, q+1}^{1,\, t}\left(x \middle| \begin{matrix} 1-\gamma_1, \ldots, 1-\gamma_t \\ 1, 1-\beta_1, \ldots, 1-\beta q \end{matrix}\right) = \sum_{j=0}^\infty \frac{\prod_{j=1}^t \sqrt{(\gamma j+r)}}{\prod_{\gamma=1}^q \sqrt{(\beta j+r)}} \frac{(-x)^r}{r!},$$

को दृष्टि में रखते हुये अन्य प्राचलों के उपयुक्त चुनाव पर राइट[6] ने विचार किया है जो मैटलेंड के सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन के नाम से विख्यात है और सांकेतिक रूप में ${}_t\psi_q\begin{bmatrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_t, -x \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{bmatrix}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार

$$\int_0^\infty x^\gamma c^{-x} L_k^{(\sigma)}(x)\, {}_t\psi_q \begin{bmatrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_t; -ux \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!} G_{t+2,\, q+2}^{1,\, t+2}\left(u \middle| \begin{matrix} -\gamma, \sigma-\gamma, 1-\gamma, \ldots, 1-\gamma_t \\ 0, 1-\beta_1, \ldots, 1-\beta_q, \sigma-\gamma+k \end{matrix}\right), \quad (4\cdot15)$$

$$x^\gamma\, {}_t\psi_q \begin{bmatrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_t ; -ux \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\gamma=0}^\infty \frac{(-1)^r}{\sqrt{(\sigma+r+1)}} G_{t+2,\, q+2}^{1,\, t+2}\left(u \middle| \begin{matrix} -\gamma-\sigma, -\gamma, 1-\gamma, \ldots, 1-\gamma_t \\ 0, 1-\beta_1, \ldots, 1-\beta_q, -\gamma+r \end{matrix}\right) L_r^{(\sigma)}(x), \quad (4\cdot16)$$

(vii) $m_1=1,\ v_1=t=0,\ q=2,\ \beta_1=0,\ \beta_2=-v$ रखने तथा श्रेणी

$$(2\pi)^{1/2(\mu-1)} \mu^{v+1/2}\, G_{0,\, 1+\mu}^{1,\, 0}\left(x\mu^\mu \middle| 0, \triangle(\mu, -v)\right) = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-x)^r}{\gamma!\, \sqrt{\{(1+v+\mu r)\}}} \equiv J_v^\mu(x),$$

का उपयोग करने पर जहाँ $J_{\nu}^{\mu}(x)$ मैटलैंड का सार्वीकृत बेसिल फलन [7, p. 257] कहलाता है,

$$\int_0^\infty x^\gamma e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x) J_\nu^\mu(ux)\,dx$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!}(2\pi)^{1/2(\mu-1)}\mu^{v+1/2}\,G_{1,\,2+\mu}^{1,\,2}\left(u\,\middle|\,\begin{matrix}-\gamma,\ \sigma-\gamma\\ 0,\ \triangle(\mu,\ -\nu),\ \sigma-\gamma+k\end{matrix}\right), \quad (4\cdot17)$$

$$x^\gamma J_v^\mu(ux)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)r}{\sqrt{\{(\sigma+r+1)\}}}(2\pi)^{1/2(\mu-1)}\mu^{v+1/2}$$

$$\times G_{2,\,2+\mu}^{1,\,2}\left(u\,\middle|\,\begin{matrix}-\gamma-\sigma,\ -\gamma\\ 0,\ \triangle(\mu,\ -\nu),\ -\gamma+r\end{matrix}\right)L_r^{(\sigma)}(x), \quad (4\cdot18)$$

जहाँ $|\arg u|<\frac{1}{2}\pi$ तथा $R(\gamma+1)>-1$.

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया, 1965, 31A, 536-46
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions· भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953
3. वही, Tables of Integral Transforms. भाग II, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954
4. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, मैकमिलन, न्यूयार्क 1964
5. शर्मा, सी० के०, इंडियन जर्न० प्योर ऐप्लाइड मैथ० (स्वीकृत)
6. राइट, ई० एम०, जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1935, 10, 287-93
7. वही, प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०, 1935, 38, 257-70

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages 263-266

H-फलन के लिये श्रेणी

के० के० बवेजा
गणित विभाग, लाल नाथ हिन्दू कालेज, रोहतक, हरियाणा

[प्राप्त—दिसम्बर 17, 1976]

सारांश

फाक्स के H-फलन के हेतु एक परिमित श्रेणी स्थापित करते हुये एक आवर्तन सम्बन्ध प्राप्त किया गया है।

Abstract

A series for H-function. *By* K. K. Baweja, Department of Mathematics, Lal Nath Hindu College, Rohtak, Haryana.

In this note a finite series for Fox's H-function has been established which has further been used to obtain a recurrence relation for the H-function.

1· विषय प्रवेश

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य H-फलन के लिये परिमित श्रेणी स्थापित करके उसका उपयोग H-फलन के लिये आवर्तन सम्बन्ध प्राप्त करना है। प्राचलों के विशिष्टीकरण से H-फलन कई उच्च अबीजीय फलनों में समानीत हो जाता है फलस्वरूप यहाँ जिस श्रेणी की स्थापना की गई है वह अत्यन्त व्यापक प्रकृति वाली है और इसकी कई विशिष्ट दशायें हैं।

फाक्स[2] द्वारा प्रचलित H-फलन को निम्न प्रकार से प्रदर्शित एवं परिभाषित किया जावेगा

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_1,e_1),\ldots,(a_p,e_p)\\(b_1,f_1),\ldots,(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}z^s\,ds \tag{1·1}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया जाता है, $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$, समस्त e तथा f धन हैं, L बार्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है जिससे कि $\Gamma(b_j - f_j s)$ $j=1, 2, \ldots, m$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_j+e_j s)$, $j=1, 2, \ldots, n$ के पोल बाईं ओर पड़ें। आगे सर्वत्र (a_p, e_p) से $(a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)$ समुच्चय का बोध होगा।

1. श्रेणी

जिस श्रेणी की स्थापना की जानी है वह है :

$$\sum_{r=0}^{u} \frac{(-u)_r (3/2+\alpha-\beta-u)_r}{r!\,(3/2+\alpha-\beta)_r}$$

$$\times H_{p+2,\ q+2}^{m+1,\ n+1}\left[z \left| \begin{matrix} (\beta-r, h), (a_p, e_p), (1/2+\alpha-u+r, h) \\ (\alpha+r, h), (b_q, f_q), (\beta+u-1/2-r, h) \end{matrix} \right.\right] \tag{2·1}$$

$$=(1/2)_u(\beta-a-1/2)_u\ H_{p+4,\ q+4}^{m+2,\ n+2}\left[z \left| \begin{matrix} (\beta, h), (1/2+\alpha, h)\ (a_p, e_p) \\ (1/2+\alpha-u, h), (-\tfrac{1}{2}+\beta+u, h); \\ (\alpha, h), (-\tfrac{1}{2}+\beta, h), (b_q, f_q), \\ (-\tfrac{1}{2}+\beta+u, h), (\tfrac{1}{2}+\alpha-u, h) \end{matrix} \right.\right]$$

जहाँ h धन संख्या है तथा

$$\sum_{j=1}^{p} e_j - \sum_{j=1}^{q} f_j \leqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=n+1}^{p} e_j + \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=m+1}^{q} f_j \equiv A > 0$$

$$|\arg z| < A\pi/2,\ Re\ \alpha > 0,\ Re\ \beta > 0.$$

उपपत्ति

(2·1) के बाम पक्ष में (1·1) से प्रतिस्थापन करने पर

$$\sum_{r=0}^{u} \frac{(-u)_r (3/2+\alpha-\beta-u)_r}{r!\,(3/2+\alpha-\beta)_r} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - f_j s)}{\prod_{j=n+1}^{q} \Gamma(1-b_j+f_j s)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+e_js)\Gamma(1-\beta+r+hs)\Gamma(\alpha+r-hs)\, z^s\, ds}{\prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-e_js)\Gamma(1/2+\alpha-u+r-hs)\Gamma(1-\beta-u+\frac{1}{2}+r+hs)}$$

समाकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करने पर, जो इस प्रक्रम में सन्निहित समाकलों के पूर्ण अभिसरण के कारण वैध है

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-f_js) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+e_js)\Gamma(\alpha-hs)\Gamma(1-\beta+hs)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+f_js) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-e_js)\Gamma(\frac{3}{2}-\beta-u+hs)\Gamma(a+\frac{1}{2}-u-hs)}$$

$$\times {}_4F_3(\alpha-hs,\, 1-\beta+hs,\, 3/2+\alpha-\beta-u,\, -u;\, 3/2+\alpha-\beta,$$
$$1/2+\alpha-u-hs,\, 3/2-\beta-u+hs;\, 1)\, z^s\, ds$$

अब तत्समिका (जिसे [4, Art 10·2. (1)] में $\lambda=0$ रखकर प्राप्त किया है) अर्थात्

$${}_4F_3(\alpha, \beta, 1/2+\alpha+\beta-n, -n; 1/2+\alpha-n, 1/2+\beta-n, \alpha+\beta+1/2; 1)$$
$$= \frac{(1/2)_n(1/2-\alpha-\beta)_n}{(1/2-\alpha)_n(1/2-\beta)_n},$$

के प्रयोग से

$$(\tfrac{1}{2})_u(\beta-\alpha-1/2)_u \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-f_js) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+f_js) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-e_js)}$$

$$\times \frac{\Gamma(\alpha-hs)\Gamma(1-\beta+hs)\Gamma(1/2-\alpha+hs)\Gamma(-1/2+\beta-hs)\, z^s\, ds}{\Gamma(3/2-\beta-u-hs)\Gamma(\alpha+1/2-u-hs)\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha+u+hs)\Gamma(-\frac{1}{2}+\beta+u-hs)}$$

(1·1) के सम्प्रयोग से हमें (2·1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

3. आवर्तन सम्बन्ध तथा विशिष्ट दशायें

(2·1) में $\mu=1$ रखने पर

$$H_{p+2,\, q+2}^{m+1,\, n+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(\beta, h), (a_p, e_p), (-1/2+\alpha, h)\\ (\alpha, h), (b_q, f_q), (1/2+\beta, h)\end{matrix}\right] \qquad (3·1)$$

$$-\frac{(1+2\alpha-2\beta)}{(3+2\alpha-2\beta)} H_{p+2,\ q+2}^{m+1,\ n+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (\beta-1, h), (a_p, e_p), (1/2+\alpha, h) \\ (\alpha+1, h), (b_q, f_q), (\beta-1/2, h) \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(2\beta-2\alpha-1)}{4} H_{p+4,\ q+4}^{m+2,\ n+2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (\beta, h), (\alpha+\frac{1}{2}, h), (a_p, e_p), (\alpha-\frac{1}{2}, h), (\beta+\frac{1}{2}, h) \\ (\alpha, h), (\beta-\frac{1}{2}, h), (b_q, f_q). (\alpha-1/2, h), (\beta+1/2, h) \end{matrix}\right]$$

समस्त e तथा $f=1$ मानने और (2·1) में $h=1$ रखने से हमें

$$\sum_{r=0}^{u} \frac{(-u)_r(3/2+\alpha-\beta-u)r}{r!\,(3/2+\alpha-\beta)_r} G_{p+2,\ q+2}^{m+1,\ n+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \beta-r, a_p, 1/2+\alpha-u+r \\ \alpha+r, b_q, \beta+u-r-1/2 \end{matrix}\right] \tag{3·2}$$

$$=(1/2)_n(\beta-\alpha-1/2)_n\, G_{p+4,\ q+4}^{m+2,\ n+2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} \beta, \alpha+1/2, a_p, \frac{1}{2}+\alpha-u, \beta-\frac{1}{2}+u \\ \alpha, \beta-1/2, b_q, 1/2+\alpha-u, \beta-1/2+u \end{matrix}\right]$$

प्राप्त होता है जहाँ $2(m+n)>p+q$ तथा $|\arg z|<\left(m+n-\frac{p+q}{2}\right)\pi$

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compositio Math, 1963, **15**, 239-341
2. फाक्स, सी०, अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-422
3. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, मैकमिलन न्यूयार्क, 1967
4. बैली, डब्लू० एन०, Generalised Hypergeometric Series, कैम्ब्रिज ट्रैक्ट्स, 1935

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No 3, July, 1977, Pages 267-275

धातु-अर्धचालक यांत्रिक स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति जनन

अनिल कुमार गोविल, रामनाथ शर्मा, विपिन कुमार

तथा

राम परशाद

राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला, नई दिल्ली

[प्राप्त—जून 26, 1976]

सारांश

धातु-अर्धचालक यांत्रिक स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति जनन पर दाब के प्रभाव का प्रायोगिक अध्ययन किया गया है। प्रयोग किये गये अर्धचालकों में सिलिकन, जर्मेनियम, गैलियम आर्सेनाइड इत्यादि सम्मिलित हैं। यह पाया गया है कि दाब के साथ द्विगुणावृत्ति आयाम बढ़ जाता है। *p*-जरमेनियम, *n*-गैलियम आर्सेनाइड तथा *p*-फेरोसिलिकन के स्पर्शों में उच्चतर वोल्टता का प्रयोग कर के स्पर्श 'निर्मित' किया गया और ऐसे निर्मित स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति जनन का अध्ययन किया गया है। प्रकाश उत्सर्जक स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति का जनन नहीं होता। अवलोकित तथ्यों की व्याख्या न तो इस समय संभव है और न इनसे यांत्रिक स्पर्शों की ओमिक प्रकृति की व्याख्या करने में अधिक सहायता मिल पाती है।

Abstract

Effect of pressure on second harmonics generation in metal-semiconductor mechanical contacts. *By* Anil K. Govil, Ram Nath Sharma, Vipin Kumar and Ram Parshad, National Physical Laboratory, New Delhi-12.

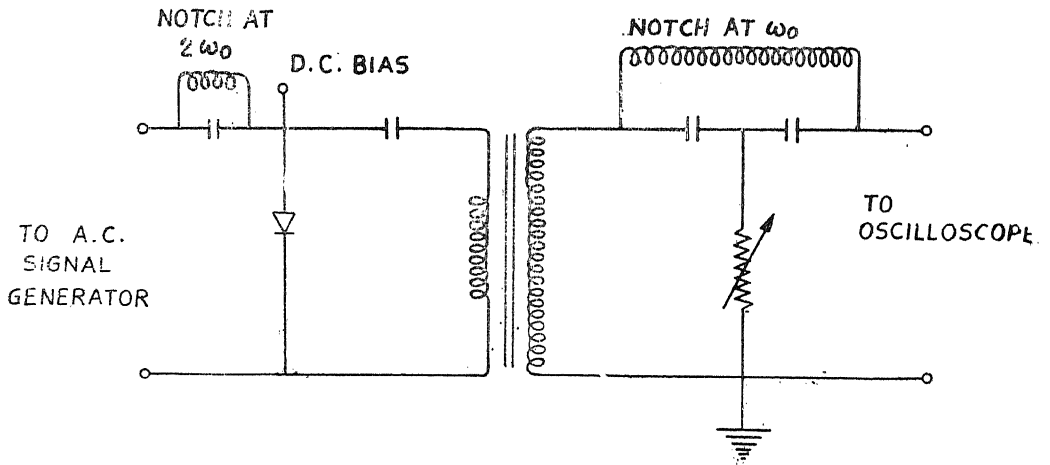
The effect of pressure on generation of second harmonics in metal-semiconductor mechanical contacts has been experimentally observed. The semiconductors used are silicon, germanium, gallium arsenide etc. It has been found that the amplitude of second harmonics increases with pressure. In case of *p*-type germanium, *n*-type gallium arsenide and *p*-type ferrosilicon, the contacts have been 'formed' by applying certain higher voltage and the second harmonics generation in such contacts has been studied. In case of light emitting contacts, the second harmonics generation is absent. The explanation of the above observations is at present difficult. The observed characteristics throw little light on the ohmic behaviour of such type of mechanical contacts.

पिछले प्रपत्रों [1, 2, 3, 4] में धातु-अर्धचालक यांत्रिक स्पर्शों के ओमिक गुण को समझने के लिये धारा-वोल्टता, अवकल प्रतिरोध-वोल्टता तथा अवकल धारिता-वोल्टता इत्यादि लक्षणों पर दाब के प्रभाव का अध्ययन किया गया था। ओमिक गुण को अधिक स्पष्ट रूप में समझने का प्रयत्न करते हुए ऐसे स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति जनन का अध्ययन किया गया है। द्विगुणावृत्ति जनन का सिद्धान्त थोमस तथा रोवेले[5] द्वारा दिया गया है। सैद्धान्तिक रूप में रैखिक धारा-वोल्टता लक्षणों पर आवृत्ति w का एक प्रत्यावर्ती विभव अध्यारोपित कर दिया जाता है। इस प्रकार स्पर्शों द्वारा जनित द्विगुणावृत्ति $2w$ का आयाम, धारा के वोल्टता के सापेक्ष द्वितीय अवकल के आयाम के अनुपात में है :

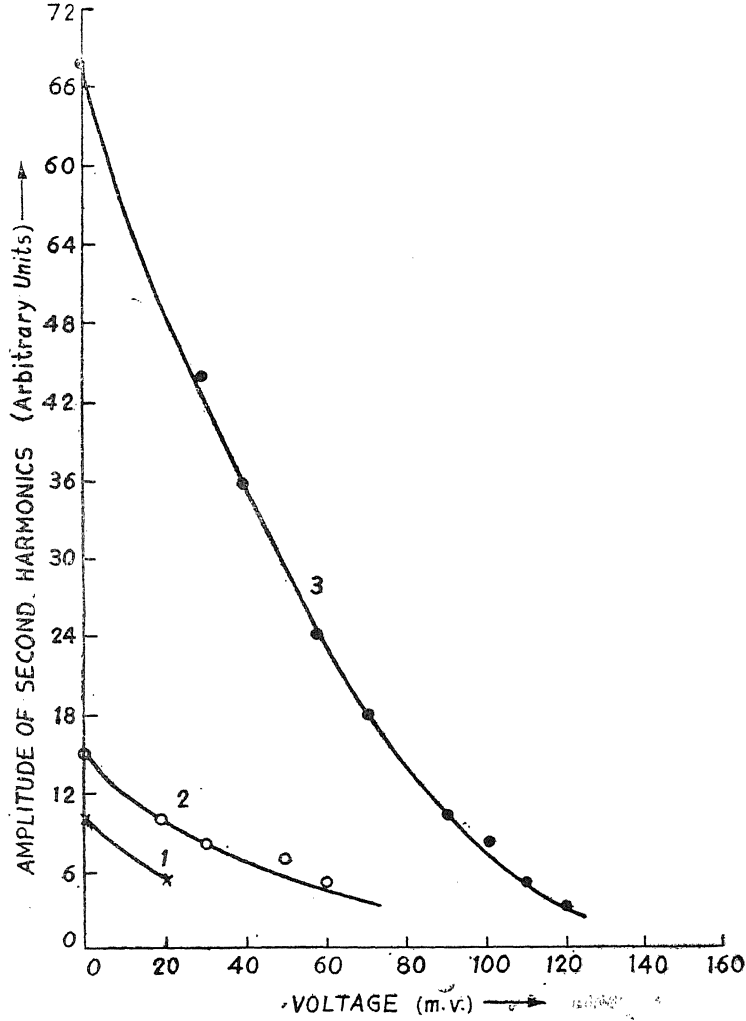
$$\left|\frac{d^2I}{dV^2}\right| \propto \cos 2wt$$

प्रस्तुत प्रपत्र में द्विगुणावृत्ति आयाम-वोल्टता लक्षणों पर दाब के प्रभाव का अध्ययन किया गया है। जिन अर्धचालकों का प्रयोग किया गया है उनमें सिलिकन, जर्मेनियम, फेरोसिलिकन, गैलियम आर्सेनाइड तथा सिलिकन कार्बाइड सम्मिलित हैं।

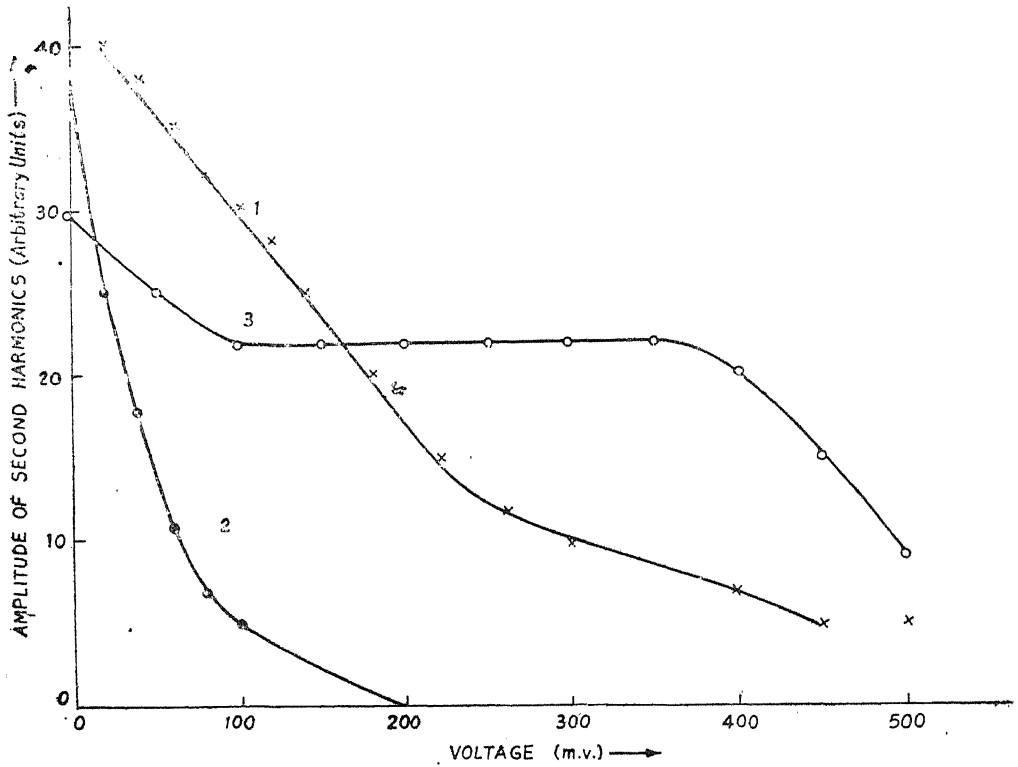
प्रयोगात्मक

यांत्रिक स्पर्श बनाने की विधि पूर्व प्रपत्र[1] में दी गयी है। वर्तमान प्रयोगों के लिये जैकलीविक तथा लैम्ब[6] द्वारा दिये गये परिचय का उपयोग किया गया है। परिपथ की रूपरेखा चित्र 1 में दिखायी गयी है। प्रयुक्त आवृत्ति 3·6 किलोहर्ज है जिसका आयाम लगभग 12 मिलीवोल्ट है।

चित्र 1 : द्विगुणावृत्ति अवलोकन के लिये उपयोग किया गया सरल परिपथ

सिलिकन

प्रयोग में लाये गये n-प्रकार के सिलिकन की लघुतम प्रतिरोधिता 3Ω से० मी० है। इस प्रकार के स्पर्श के लिये द्वि० गु० आयाम-वोल्टता लक्षणों पर दाब का प्रभाव चित्र 2 में दिखाया गया है।

चित्र 2 : n-सिलिकन् (3 Ω से० मी०) के स्पर्शों में द्वि० गु० आयाम का वोल्टता के साथ विचरण। केवल अग्रिम नति का प्रयोग किया गया है। प्रयोग की गयी आवृत्ति 3·6 किलोहर्ज है तथा अनुप्रयुक्त परावर्ती विभव 90 मिलीवोल्ट है। बिन्दु स्पर्श पर विभिन्न दाब लगाये गये हैं। वक्र (1) : 100 ग्राम, वक्र (2) : 150 ग्राम, वक्र (3) : 300 ग्राम

अग्रिम तथा विपरीत दोनों नतियों का प्रयोग किया गया है। इस प्रकार जैसे-जैसे दाब बढ़ाते हैं, द्वि० गु० आयाम बढ़ता जाता है और फिर एक क्रांतिक दाब के बाद स्थिर हो जाता है। अग्रिम नति में वोल्टता मान अधिक करने पर एक क्रांतिक वोल्टता मान पर द्वि० गु० आ० शून्य हो जाता है। क्रांतिक वोल्टता का मान दाब बढ़ाने पर बढ़ जाता है। इसके अतिरिक्त दाब के बढ़ने पर द्वि० गु० आ० भी बढ़ जाता है। विपरीत नति में भी दाब बढ़ाने पर द्वि० गु० आ० तथा क्रांतिक वोल्टता मान बढ़ जाता है। लेकिन अग्रिम नति की अपेक्षा आयाम तथा क्रांतिक वोल्टता मान काफी कम हैं।

उच्चतर प्रतिरोधिता वाले सिलिकन स्पर्शों की ओर बढ़ने पर शून्य वोल्टता पर द्वि० गु० अवलोकन कठिन हो जाता है। लेकिन वोल्टता बढ़ाने पर द्वि० गु० अवलोकन संभव हो पाता है जो अधिक वोल्टता बढ़ाने पर अदृश्य हो जाता है, जैसा कि लघुप्रतिरोधित वाले स्पर्शों में होता है। इसके

चित्र 3 : p-प्रकार जर्मेनियम के स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति आयाम का वोल्टता के साथ विचरण। वक्र (1) : निर्मित स्पश : धातु जर्मेनियम की अपेक्षा धनात्मक विभव पर हैं। वक्र (2) : निर्मित स्पर्श, धातु स्पर्श जर्मेनियम की अपेक्षा ऋणात्मक विभव पर हैं। वक्र(3) : अनिर्मित स्पर्श : धातु स्पर्श जर्मेनियम की अपेक्षा ऋणात्मक विभव पर है

अतिरिक्त, दाब जितना अधिक होगा, द्वि० गु० आ० उच्चिष्ठ के लिये आवश्यक वोल्टता मान उतना ही कम होगा।

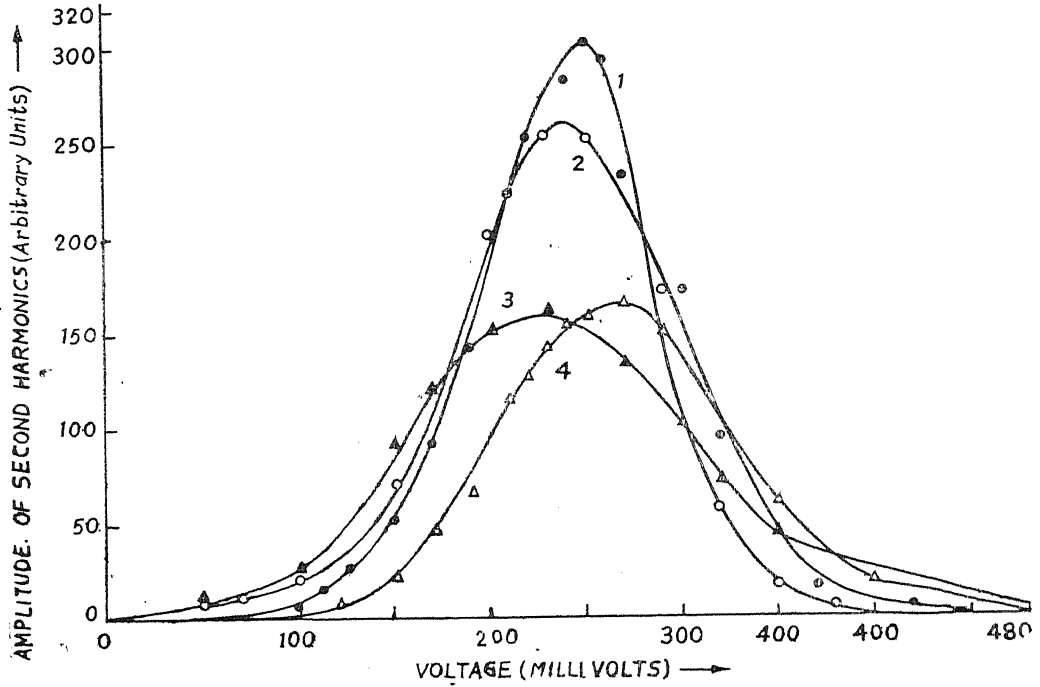
उच्चतर वोल्टता मानों (3-5 वोल्ट) पर प्राप्त द्वि० गु० जनन, अवधाव-विभंग संधि द्विअग्रों की तरह है[7]।

p-प्रकार के सिलिकन स्पर्शों में द्वि० गु० जनन n-प्रकार के सिलिकन स्पर्शों की तरह ही है लेकिन द्वि० गु० आ० का मान अपेक्षाकृत कम है।

जर्मेनियम

n-प्रकार के जर्मेनियम स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति जनन सिलिकन स्पर्शों के समान है लेकिन आयाम कम है। p-प्रकर के जरर्मेनियम स्पर्शों में स्थिति भिन्न है। पृष्ठ पर कुछ बिन्दुओं को छोड़कर अन्य स्थानों पर द्वि० गु० जनन नहीं होता। उन बिन्दुओं पर जहाँ द्वि० गु० जनन नहीं होता, उच्चतर वोल्टता ($\sim$10 वोल्ट) पर धारा प्रवाहित करके स्पर्शों का निर्माण किया गाया है। ऐसा करने से प्राप्त स्पर्शों में द्वि० गु० ज० चित्र 3 में दिखाया गया है, जब धातु बिन्दु स्पर्श जर्मेनियम की अपेक्षा क्रमशः धनात्मक तथा ऋणात्मक विभवों पर हैं। तुलना के लिये अनिर्मित स्पर्श बिन्दुओं पर ही द्वि० गु० जनन दिखाया गया है।

गैलियम आर्सेनाइड

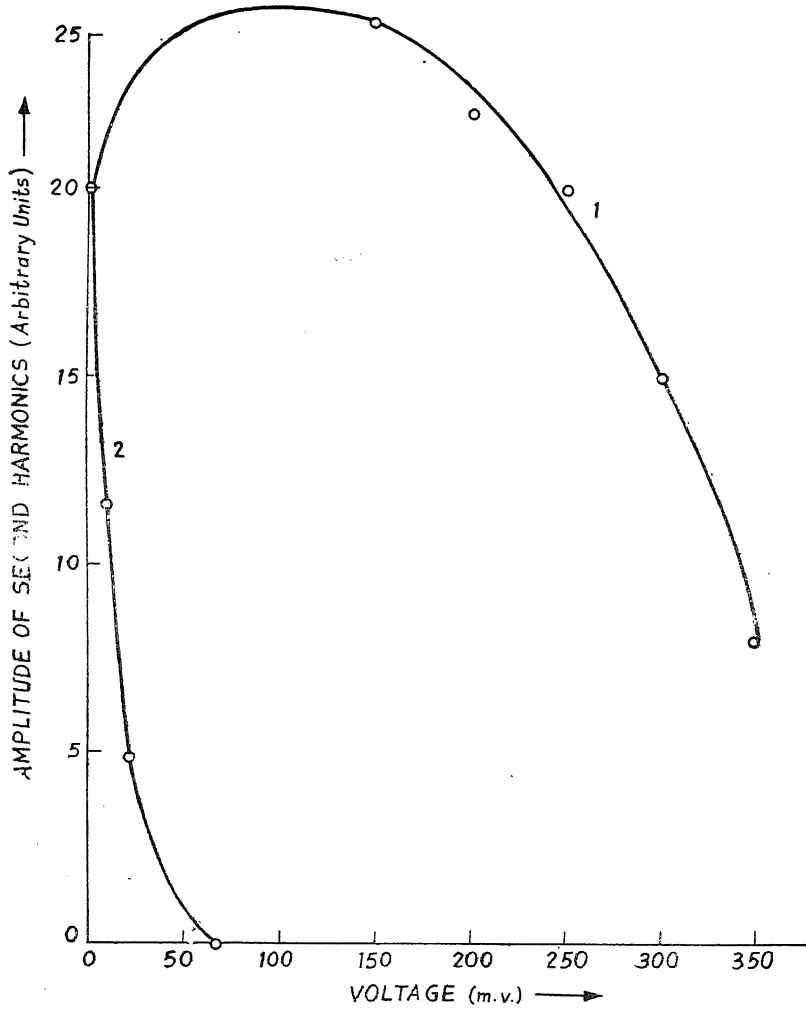
n तथा p प्रकार के गैलियम आर्सेनाइड (गै० आ०) स्पर्शों में सामान्यतः द्वि०गु० जनन नहीं हुआ। p-प्रकार के गै० आ० से बने स्पर्श में वोलटता तथा दाब बढ़ाने पर (वोल्टता $\sim$5 वोल्ट) द्वि० गु० जनन अवधाव विभंग प्रक्रिया में जनित द्वि० गु० की तरह हुआ। द्वि० गु० ज० के साथ-साथ काफी रव का भी जनन होता है। एन प्रकार गै० आ० (प्रतिरोधिता $\sim$0·1 से० मी०) से बने स्पर्शों में अग्रिम नति में द्वि० गु० जनन अवधाव विभंग प्रक्रिया में जनित द्वि० गु० की तरह ही हुआ; लेकिन विपरीत नति में कोई द्वि० गु० जनन नहीं हुआ। इसके बाद इस स्पर्श को अधिक वोल्टता ($\sim$10 वोल्ट) लगाकर 'निर्माण' किया गया। 'निर्माण' के लिये विभिन्न धातुओं जैसे टंगस्टन, कार्बन, टिन, लेड-एन्टीमनी मिश्रधातु तथा निकिल का प्रयोग किया गया। कार्बन के स्पर्श के लिये कम वोल्टता (लगभग 2 वोल्ट) पर ही निर्माण हो गया। 'निर्मित' स्पर्शों के गुण-निर्माण के लिये प्रयुक्त वोल्टता की ध्रुवणता से स्वतंत्र हैं। निर्मित स्पर्शों में द्वि० गु० जनन का वोल्टता के साथ विचरण चित्र 4 में दिखाया गया है। इस प्रकार, स्पर्श धातु चाहे कोई भी हो, द्वि० गु० आ० अधिक है जब धातु स्पर्श गै० आ० की अपेक्षा ऋणात्मक विभव पर होता है। कार्बन तथा टिन से निर्मित स्पर्शों में द्वि० गु० आ० अपेक्षाकृत अधिक है। प्रत्येक स्पर्श में द्वि० गु० आ० उच्चिष्ठ लगभग समान वोल्टता ($\sim$0·2 वोल्ट) पर है लेकिन प्राप्त किये गये शिखरों का रेखा-विस्तार विभिन्न है। यह लक्षण एक $p-n$ संधि के लिये गोबिल इत्यादि[7] द्वारा प्राप्त किये गये लक्षणों के समान है।

चित्र 4 : n-प्रकार गैलियम आर्सेनाइड (0·1 Ω से० मी०) के निर्मित स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति आयाम का वोल्टता के साथ विचरण जबकि धातु, n-गै० आ० की अपेक्षा ऋणात्मक विभव पर है। वक्र (1) : कार्बन द्वारा निर्मित स्पर्श; वक्र (2) : टिन द्वारा निर्मित स्पर्श; वक्र (3) : निकिल द्वारा निर्मित स्पर्श; ; वक्र (4) : लेड-एन्टीमनी मिश्रधातु द्वारा निर्मित स्पर्श

फेरोसिलिकन

उपयोग किया गया फेरोसिलिकन व्यापारिक कच्चे उत्पादन से लिया गया जिसमें सिलिकन की मात्रा लगभग 98% होती है। फेरोसिलिकन का लैप किया गया पृष्ठ प्रयोग किया गया क्योंकि 'तोड़े हुए' पृष्ठ पर विद्युत स्पर्श बनाना कठिन होता है। लैप किये गये पृष्ठ पर कुछ स्थानों को छोड़कर अधिकतर बिन्दुओं पर द्वि० गु० जनन नहीं होता। अतः लगभग 5 वोल्ट पर स्पर्श का निर्माण किया गया। ऐसे निर्मित स्पर्शों के लिये द्वि० गु० आ० वोल्टता लक्षण 100 ग्राम दाब के लिये चित्र 5 में दिखाये गये हैं। दोनों नतियों का प्रयोग किया गया है।

सिलिकन कार्बाइड तथा गेलियम फास्फाइड

सिलिकन कार्बाइड नई ग्लोवार छड़ों को तोड़कर प्राप्त किया गया। इस स्पर्शों में कम वोल्टता पर द्वि० गु० जनन सिलिकन स्पर्शों के समान ही है। अधिक बोल्टता बढ़ाने पर (~10 वोल्ट) स्पर्श

बिन्दु से प्रकाश उत्सर्जन होता है। इस स्थिति में स्पर्श से केवल रव का जनन होता है, गुणावृत्तियों का नहीं। इसी प्रकार गैलियम फास्फाइड पर बनाये गये स्पर्शों में प्रकाश उत्सर्जन होने पर केवल रव का जनन ही देखा गया है।

चित्र 5: p-फेरोसिलिकन् से बने 'निर्मित' स्पर्श के लिये द्विगुणावृत्ति आयाम का वोल्टता के साथ विचरण। स्पर्श पर 100 ग्राम दाब दिया गया है। वक्र (1) : धातु स्पर्श p-फेरोसिलिकन की अपेक्षा ऋणात्मक विभव पर है; वक्र (2) : धातु स्पर्श p-फेरोसिलिकन की अपेक्षा धनात्मक विभव पर है

विवेचना

प्रकाश स्पेक्ट्रमी में द्विगुणावृत्ति जनन का कारण अरेखीय ध्रुवीकरण कहा गया है। हर्जबर्ग[8] ने सैद्धान्तिक रूप में यह दिखाया है कि अरेखीय ध्रुवीकरण, आयन की माध्य स्थिति के दोनों ओर दोलन कर रहे संयोजकता इलेक्ट्रानों की अरैखिक स्थैतिज ऊर्जा के कारण है। इस प्रकार एक सरल प्रसंम्वादी दोलक के लिये

$$\frac{d^2x}{dt^2}=Ax$$

जहाँ x है इलेक्ट्रान का मध्य स्थिति से स्थांतरण। लेकिन अप्रसम्वादी दोलक की स्थिति में

$$\frac{d^2x}{pt^2}=Ax-Bx^2+\dots$$

इसके अतिरिक्त रूटनर तथा शापिरो[9] द्वारा यह सिद्ध किया गया है कि दिक्-आवेश-सीमित डॉयोडों में द्विगुणावृत्ति जनन का कारण दिक्-आवेश तरंग में स्व-अन्योन्यक्रिया है। इस प्रकार दिक्-आवेश तरंग जो वाह्य प्रत्यावर्ती विभव से उत्तेजित होती है, वाहक घनत्व तथा विद्युत विभव की तरंग है। तरंग में उपस्थित वाहक तरंग का स्वयं का विद्युत क्षेत्र अनुभव करते हैं और इस प्रकार द्विगुणावृत्ति को जन्म देते हैं। प्रकाश स्पेक्ट्रमी में अरैखिक ध्रुवीकरण उच्च प्रकाशीय आवृत्ति पर द्विगुणावृत्ति जनन के लिये उत्तरदायी हो सकता है। लघु आवृत्तियों पर रूटनर-शापिरो प्रक्रिया अधिक संगत प्रतीत होती है। वर्तमान उद्देश्यों के लिये उपरोक्त दो प्रक्रियाओं में से अकेले एक को चुनना कठिन हो जाता है। संभावित व्याख्या निम्न प्रकार से कर सकते हैं।

पिछले प्रपत्रों में यह सिद्ध करने का प्रयास किया गया है कि स्पर्शों में प्रवाहित धारा का एक अंश अंतरपृष्ठ अवस्थाओं अथवा विरूपण दोषों के कारण है। यह अंतरपृष्ठ अवस्थाएँ जब सुरंगीकृत इलेक्ट्रानों द्वारा उत्तेजित होती हैं तो अरैखिक ध्रुवीकरण की संभावना हो सकती है। दाब बढ़ाने पर द्वि० गु० आ० में वृद्धि का कारण यह हो सकता कि दाब बढ़ाने पर और अधिक अंतरपृष्ठ अवस्थाएँ धारा-प्रवाह के लिये सक्रिय हो जाती हैं। लेकिन वर्तमान अवलोकनों के अनुसार द्वि० गु० जनन केवल लघु वोल्टता मानों तक ही सीमित है जिसकी व्याख्या अभी संभव नहीं है। विपरीत नति में तो यह जनन बहुत कम वोल्टता (50 मिलीवोल्ट) तक ही सीमित है।

निर्मित स्पर्शों में द्वि० गु० जनन संधि डॉयोडों की तरह ही होता है। जहाँ द्वि० गु० आ० उच्चिष्ठ एक परिमित वोल्टता पर होता है। p-प्रकार के जर्मेनियम, n-प्रकार के गेलियम आर्सेनाइड तथा p-प्रकार फेरोसिलिकन, तीनों स्थितियों में, निर्मित स्पर्शों के लिये पायी गयी अग्रिम नति (अनिर्मित स्पर्शों से तुलना करने पर) उल्टी दिशा में हैं जिसकी कोई व्याख्या नहीं पायी गयी है। विभिन्न धातुओं के 'निर्मित' स्पर्शों पर प्रभाव की भी कोई उचित व्याख्या नहीं है।

सिलिकन द्वारा बने धातु-अर्धचालक स्पर्शों में द्वि० गु० जनन केवल लघु वोल्टताओं तक ही सीमित है। जर्मेनियम, गैलियम आर्सेनाइड इत्यादि स्पर्शों में द्विवगुणावृत्ति जनन कठिन है लेकिन स्पर्श के 'निर्माण' के बाद द्वि० गु० जनन संभव हो जाता है जो *p-n* संधि में अवलोकित द्वि० गु० जनन की तरह है। प्रकाश उत्सर्जक स्पर्शों में द्विगुणावृत्ति जनन नहीं होता है। निर्माण के लिये प्रयोग की गई धातु की प्रकृति 'निर्मित' स्पर्शों के गुणों पर महत्वपूर्ण प्रभाव रखती है। वर्तमान अवलोकनों द्वारा धातु-अर्धचालक स्पर्शों की ओमिक प्रकृति पर कोई विशेष निष्कर्ष निकालना संभव नहीं हो पाया है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

उपलब्ध सुविधाओं के उपयोग की अनुमति देने के लिये लेखक राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला के निदेशक के प्रति कृतज्ञता ज्ञापन करते हैं। अनुसंधान फेलोशिप प्रदान के लिये दो लेखक (अ० कु० गो० तथा रा० प्र० श०) वैज्ञानिक एवं प्रोद्योगिक अनुसंधान परिषद, नई दिल्ली के प्रति तथा एक लेखक (वि० कु०) परमाणु ऊर्जा विभाग वम्बई के प्रति आभार प्रकट करते हैं।

निर्देश

1. कुमार, वि०, राम, सी० तथा परशाद, रा०, **प्रकाशनीय**
2. कुमार, वि० तथा परशाद, रा०, **प्रकाशनीय**
3. कुमार, वि०, राम, सी० तथा परशाद, रा०, **प्रकाशनीय**
4. वही, **प्रकाशनीय**
5. थोमस, सी० ई० तथा रोवेल, जे० एम०, **रिव्यू साइंटिफिक इन्स्ट्रूमेंट्स** 1965, **36**, 130
6. जैकलीविक, आर० सी० तथा लैम्ब, जै०, Tunneling Phenomena in Solids, संपा : वर्सटीन, ई० तथा लुंडकिवस्ट, एस०, (**प्लीनम प्रेस**, 1969) **पृष्ठ** 233-242
7. गोविल, अ० कु०, इत्यादि **अप्रकाशित**
8. हर्जवर्ग, जी०, Atomia Spectro and Atomia Structure, (**डोवर पब्लिकेशन्स, न्यूयार्क**, 1944)
9 रुटनर, ई० तथा शापिरो, बी०, **सालिड स्टेट इलेक्ट्रानिकस**, 1975, **18**, 1073-75

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 3, July, 1977, Pages 277-289

दो चरों वाली संमितीय फूरियर अष्टियाँ एवं आत्म-व्युत्क्रम फलन

कु० इंदिरा अग्रवाल तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—सितम्बर 7, 1976]

सारांश

दो चरों वाली कतिपय नवीन संमितीय फूरियर अष्टियाँ प्राप्त की गई हैं। आत्म-व्युत्क्रम फलनों पर तीन प्रमेय तथा उनके उपप्रमेय एवं सम्प्रयोग दिये गये हैं। पठान द्वारा दिये गये प्रमेय प्रस्तुत शोध की विशिष्ट दशायें बन जाती हैं।

Abstract

On symmetrical Fourier kernels and self reciprocal functions of two variables. *By* (Miss) Indira Aggarwala and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

Some new symmetrical Fourier kernels in two variables have been obtained. Three theorems on self reciprocal functions are given with corollaries and applications. Theorems given by Pathan (1971) become particular cases of the present investigation.

प्रस्तावना

चतुर्वेदी तथा गोयल[1] ने परिभाषित किया है कि

$$\overset{*}{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv \overset{*}{A}{}^{m_1,\, 0\, :\, m_2,\, n_2\, :\, m_3,\, n_3}_{p_1,\, q_1\, :\, p_2,\, q_2\, :\, p_3,\, q_3}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} [((a_{p_1}, \alpha_{p_1})); ((b_{q_1}, \beta_{q_1}))]: \\ \{((c_{p_2}, \gamma_{p_2})); ((d_{q_2}, \delta_{q_2}))\}; \{((e_{p_3}, \lambda_{p_3})); ((f_{q_3}, \mu_{q_3}))\} \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \phi'(s+t)\,,\, \psi(s, t)\,.\, x^s y^t\,.\, ds\,.\, dt \tag{1·0}$$

जहाँ $$\phi'(s+t)=\frac{\prod_{j=1}^{m1}\Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t)}{\prod_{j=1+m_1}^{p1}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s-\alpha_j t)\prod_{j=1}^{q1}\Gamma(b_j+\beta_j s+\beta_j t)}$$

तथा $$\psi(s,t)=\frac{\prod_{j=1}^{m2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)\prod_{j=1}^{n2}\Gamma(d_j-\delta_j s)}{\prod_{j=1+m_2}^{p2}\Gamma(c_j-\gamma_j s)\prod_{j=1+m2}^{q2}\Gamma(1-d_j+\delta_j s)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m3}\Gamma(1-e_j+\lambda_j t)\prod_{j=1}^{n3}\Gamma(f_j-\mu_j t)}{\prod_{j=1+m_3}^{p3}\Gamma(e_j-\lambda_j t)\prod_{j=1+n_3}^{q3}(1-f_j+\mu_j t)}$$

यही नहीं $((a_{p_1}, \alpha_{p_1}))=(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_3)\ldots(a_p, \alpha_{p_1})$, आगे भी समस्त $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$, तथा μ धन हैं, L_1 तथा L_2 ऐसे कंटूर हैं तो s तथा t तलों में अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण हैं जो आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त करते हैं कि $\Gamma(d_j-\delta_j s)$ $j=1, 2, \ldots, n_2$; $m(f_j-\mu_j t)$, $j=1, 2\ldots n_3$ के पोल क्रमशः L_1 तथा L_2 कंटूरों के दाईं ओर पड़ें। $\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)$, $j=1, 2.. m_2$; $\Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t)$, $j=1, 2\ldots m_1$ तथा $\Gamma(1-e_j+\lambda_j t)$, $j=1, 2\ldots m_3$ के पोल क्रमशः L_1 तथा L_2 कंटूरों के बाईं ओर स्थित हैं। धन पूर्णांक $p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3, n_2, n_3$ निम्नाँकित असमिकाओं की तुष्टि करते हैं

$$q_2, q_3 \geqslant 1;\ p_1, q_1 \geqslant 0;\ 0 \leqslant m_1, m_2, m_3, n_2, n_3 \leqslant p_1, p_2, p_3, q_2, q_3$$
$$p_1+p_2 \leqslant q_1+q_2;\ p_1+p_2 \leqslant q_1+q_3$$

जहाँ $0 \leqslant m_1, m_2 \ldots n_3 \leqslant p_1, p_2 \cdots q_3$ का अर्थ है असमिकाओं $0 \leqslant m_1, p_1$; $0 \leqslant m_2 \leqslant p_2$ का समुच्चय और $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \lambda_j, \mu_j$ में सबसे बड़े हैं $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$। मान $x=0$ तथा $y=0$ सम्मिलित नहीं किये गये।

परिभाषित $A^*\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ x तथा y का वैश्लेषिक फलन है बशर्ते कि

$$|\arg x| < \left(W_1-\frac{\overline{W}_1}{2}\right)\pi;\ 2W_1 > \overline{W}_1 \tag{1·1}$$

$$|\arg y| < \left(W_2-\frac{\overline{W}_2}{2}\right)\pi;\ 2W_2 > \overline{W}_2 \tag{1·2}$$

जहाँ $W_1=m_1\alpha+m_2\gamma+n_2\delta$; $W_2=m_1\alpha+m_3\lambda+n_3\mu$.

$\overline{W}_1=p_1\alpha+p_2\gamma+q_1\beta+q_2\delta$; $\overline{W}_2=p_1\alpha+p_3\lambda+q_1\beta+q_3\mu$.

अब हम एक संमितीय फूरियर अष्टि का प्रवेश करते हैं,

$$K(x, y]\equiv(M M_1 N N_1)^{1/2} . \left(\frac{Mx}{N}\right)^{(N-1)/2} . \left(\frac{M_1 y}{N_1}\right)^{(N_1-1)/2}$$

$$\overset{*}{A}{}^{p,\ 0\ :\ p_1,\ q_1\ :\ p_2,\ q_2}_{2p,\ 0\ :\ 2p_1,\ 2q_1\ :\ 2p_2,\ 2q_2}\left[\begin{matrix}\left(\frac{M}{N}x\right)^N \\ \left(\frac{M_1}{N_1}y\right)^{N_1}\end{matrix}\middle| [((a_p, \alpha_p)), ((1-a_p+2\alpha_p, \alpha_p)); -]:\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{((1-c_{p_1}, \gamma_{p_1})), ((c_{p_1}-\gamma_{p_1}, \gamma_{p_1})); ((d_{q_1}, \delta_{q_1})), ((1-d_{q_1}-\delta_{q_1}, \delta_{q_1}))\}; \\ \{((1-e_{p_2}, \lambda_{p_2})), ((e_{p_2}-\lambda_{p_2}, \lambda_{p_2})); ((f_{q_2}, \mu_{q_2})), ((1-f_{q_2}-\mu_{q_2}, \mu_{q_2}))\}\end{matrix}\right] \qquad (1 \cdot 3)$$

यदि $f(x, y)$ द्वारा समीकरण

$$f(x, y)=\int_0^\infty \int_0^\infty k\ (xz_1, yz_2)\ . f(z_1, z_2)\ . dz_1\ . dz_2$$

की तुष्टि होती है तो $f(x, y)$ को अष्टि $k(x, y)$ के लिये आत्म-व्युत्क्रम कहा जाता है और इसे निम्न प्रकार अंकित किया जावेगा

$$R^{M,\ M_1\ :\ (a_p)\ :\ (d_{q_1});\ (c_{p_1})\ :\ (f_{q_2});\ (e_{p_2})}_{N,\ N_1\ :\ (\alpha_p)\ :\ (\delta_{q_1});\ (\gamma_{p_1})\ :\ (\mu_{q_2});\ (\lambda_{p_2})}$$

जहाँ $(a_p)=a_1, a_2 \ldots a_p$,

(1·3) में दी गई अष्टि $k(x, y)$ में निम्नांकित अष्टि विशष्ट दशाओं के रूप में निहित है ।

(i) $p=0$, रखने पर एक नवीन अष्टि प्राप्त होती है जिसमें दो H-फलन का गुणनफल रहता है

$$K_1(x, y)\equiv(MM_1 NN_1)^{1/2} . \left(\frac{Mx}{N}\right)^{(N-1)/2} . \left(\frac{M_1 y}{N_1}\right)^{(N_1-1)/2}$$

$$H^{q_1,\ p_1}_{2p_1,\ 2q_1}\left[\left(\frac{M}{N}x\right)^N \middle| \begin{matrix}((1-c_{p_1}, \gamma_{p_1})), ((c_{p_1}-\gamma_{p_1}, \gamma_{p_1})) \\ ((d_{q_1}, \delta_{q_1})), ((1-d_{q_1}-\delta_{q_1}, \delta_{q_1}))\end{matrix}\right],$$

$$\times H^{q_2,\ p_2}_{2p_2,\ 2q_2}\left[\left(\frac{M_1}{N_1}y\right)^{N_1} \middle| \begin{matrix}((1-e_{p_2}, \lambda_{p_2})), ((e_{p_2}-\lambda_{p_2}, \lambda_{p_2})) \\ ((f_{q_2}, \mu_{q_2})), ((1-f_{q_2}-\mu_{q_2}, \mu_{q_2}))\end{matrix}\right]$$

कोई फलन जो $K_1(x, y)$ के लिये आत्म-व्युत्क्रम होगा वह होगा

$$R^{M,\, M_1\, :\, --\, :\, (d_{q_1});\, (c_{p_1})\, :\, (f_{q_2});\, (e_{p_2})}_{N,\, N_1\, :\, --\, :\, (\delta_{q_1});(\gamma_{p_1})\, :\, (\mu_{q_2});\, (\lambda_{p_2})} \tag{1·4}$$

(ii) जब $p=0$ तथा $\gamma_{p_1}=\delta_{q_1}=\lambda_{p_2}=\mu_{q_2}=1$, तो हमें दो G-फलनों के गुणनफल वाली अष्टि प्राप्त होती है

$$K_2(x, y)\equiv(MM_1 NN_1)^{1/2}\left(\frac{Mx}{N}\right)^{(N-1)/2} . \left(\frac{M_1 y}{N_1}\right)^{(N_1-1)/2}$$

$$G^{q_1,\, p_1}_{2p,\, 2q_1}\left[\left(\frac{M}{N}x\right)^N \middle| \begin{matrix}(1-c_{p_1}),\, (c_{p_1}-1)\\ (d_{q_1}),\, (-d_{q_1})\end{matrix}\right] G^{q_2,\, p_2}_{2p,\, 2q_2}\left[\left(\frac{M_1}{N_1}y\right)^{N_1} \middle| \begin{matrix}(1-e_{p_2}),\, (e_{p_2}-1)\\ (f_{q_2}),\, (-f_{q_2})\end{matrix}\right]$$

कोई फलन जो $K_2(x, y)$ के लिये आत्म-व्युत्क्रम होगा वह होगा

$$R^{M,\, M_1\, :\, --\, :\, (d_{q_1});\, (c_{p_1})\, :\, (f_{q_2});\, (e_{p_2})}_{N,\, N_1\, :\, --\, :\, 1;\, 1\, :\, 1;\, 1} \tag{1·5}$$

(iii) $M_1=N_1=1$, $p_2=q_2=p=0$ रखने पर तथा सीमा को $y\to 0$ लेने पर हमें एक नवीन संमितीय फूरियर अष्टि प्राप्त होती है जिसे पठान[4] ने निम्नवत् दिया है

$$K_3(x, y)\equiv N\left(\frac{M}{N}\right)^{N/2} . x^{(N-1)/2} . H^{q_1,\, p_1}_{2p_1,\, 2q_2}\left[\left(\frac{M}{N}x\right)^{N} \middle| \begin{matrix}((1-c_{p_1}, \gamma_{p_1})),\, ((c_{q_1}-\gamma_{p_1}, \gamma_{p_1}))\\ ((d_{q_1}, \delta_{q_1})),\, ((1-d_{q_1}-\delta_{q_1}, \delta_{q_1}))\end{matrix}\right]$$

$K_3(x, y)$ के लिये आत्म-व्युत्क्रम फलन होगा

$$R^{M,\, 1\, :\, --\, :\, (d_{q_1});\, (c_{p_1})\, :\, --;\, --}_{N,\, 1\, :\, --\, :\, (\delta_{q_1});\, (\gamma_{p_1})\, :\, --;\, --} \tag{1·6}$$

(iv) यदि विशिष्ट दशा (iii) में $M=N=1$ तो यह फाक्स[3] के द्वारा दिये गये फलन में समानीत हो जावेगा जिसके आत्म-व्युत्क्रम फलन को

$$R^{1,\, 1\, :\, --\, :\, (d_{q_1});\, (c_{p_1})\, :\, --;\, --}_{1,\, 1\, :\, --:\, (\delta_{q_1});\, (\gamma_{p_1})\, :\, --;\, --}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा।

2. मुख्य फल जिन्हें व्यवहृत होना है

हम निम्नांकित प्रमेयिका का उल्लेख करेंगे जिसे प्रमेयों को सिद्ध करने में व्यवहृत किया जावेगा।

यदि (i) $\int_0^x \int_0^y f(x, y) . dx . dy=\int_0^\infty \int_0^\infty f(z_1, z_2) . \frac{K'(xz_1, yz_2)}{z_1\, z_2}\, dz_1, dz_2, K'(x, y)$

$$=\int_0^x \int_0^y K(x, y) . dx . dy$$

(ii) $\delta_j >= 0, j=1, 2, \ldots, q_1 : \gamma_j > 0, j=1, 2, \ldots p_1$

$\lambda_j > 0, \quad j=1, 2 \ldots p_2; \mu_j > 0, j=1 \ldots q_2$

$\alpha_j > 0, \quad j=1, 2 \ldots p$

(iii) $Re\,(d_j) > -\frac{1}{2}\delta_j, j=1, 2 \ldots q_1; Re\,(f_j) > -\frac{1}{2}\mu, j=1, 2 \ldots q_2$

$Re\,(c_j) > \frac{\gamma_j}{2}, j=1, 2 \ldots p_1; Re\,(e_j) > \frac{\lambda_j}{2}, j=1, 2 \ldots p_2$

(iv) $E(\frac{1}{2}-s, \frac{1}{2}-t)$ जो s तना t का सम फलन है

(v) $\left(\frac{M}{N}\right)^{-s/2} \cdot \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t/2} Q(s, t) \, . \, E(s, t) \in L_1 \, (\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty)$

तो $$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \left(\frac{M}{N}\right)^{-s/2} \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t/2} Q(s, t) \, . \, E(s, t) \, . \, x^{-s} \, . \, y^{-t} \, . \, ds \, . \, dt \tag{2·0}$$

जहाँ $$Q(s, t) \equiv \frac{1}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left[a_j - 2\alpha_j + \alpha_j\left(\frac{s}{N} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\right) + \alpha_j\left(\frac{t}{N_1} - \frac{1}{2N_1} + \frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{q_1} \Gamma\left[d_j + \delta_j\left(\frac{s}{N} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\right)\right]}{\prod_{j=1}^{p_1} \Gamma\left[c_j - \gamma_j + \gamma_j\left(\frac{s}{N} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\right)\right]} \times \frac{\prod_{j=1}^{q_2} \Gamma\left[f_j + \mu_j\left(\frac{t}{N_1} - \frac{1}{2N_1} + \frac{1}{2}\right)\right]}{\prod_{j=1}^{p_2} \Gamma\left[e_j - \lambda_j + \lambda_j\left(\frac{t}{N_1} - \frac{1}{2N_1} + \frac{1}{2}\right)\right]}$$

$Q(s, t)$ को $Q_1(s, t)$ द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा जब $p=0$ ।

इस प्रमेयिका की उपपत्ति सरल है अतः नहीं दी जा रही है ।

3. प्रमेय 1

यदि $$f(x, y) = R^{M, M_1 : (a_p) : (d_{q_1}); (c_{p_1}) : (f_{q_2}); (e_{p_2})}_{N, N_1 : (\alpha_p) : (\delta_{q_1}); (\gamma_{p_1}) : (\mu_{q_2}); (\lambda_{p_2})} \tag{3·0}$$

तथा $$p(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} Q(s, t) \, . \, Q'(1-s, 1-t) \, . \, \omega(s, t) \, e^{sx} \, . \, e^{yt} \, ds \, . \, dt \tag{3·1}$$

यदि $x>0, y>0$

$=0$ यदि $x<0, y<0$.

तो $g(x, y)=\frac{1}{xy}\int_0^x\int_0^y p\left[\log\frac{x}{z_1}, \log\frac{y}{z_2}\right] . f(z_1, z_2) . dz_1 . dz_2$

$$R^{M, M_1 : (a'_p) : (d'_{q_1}); (c'_{p_1}) : (f'_{q_2}); (e'_{p_2})}_{N, N_1 : (\alpha'_p) : (\delta'_{q_1}); (\gamma'_{p_1}) : (\mu_{q_2}); \lambda'_{p_2})} \text{ के तुल्य है} \tag{3·2}$$

जहाँ $$Q'(s, t)=\frac{1}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left[a'_j-2\alpha'_j+\alpha'_j\left(\frac{s}{N}-\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)+\alpha'_j\left(\frac{t}{N_1}-\frac{1}{2N_1}+\frac{1}{2}\right]\right)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma\left[d'_j+\delta'_j\left(\frac{s}{N}-\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)\right]}{\prod_{j=1}^{p_1}\Gamma\left[c'_j-\gamma'_j+\gamma'_j\left(\frac{s}{N}-\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)\right]}\times\frac{\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma\left[f_j+\mu'_j\left(\frac{t}{N_1}-\frac{1}{2N_1}+\frac{1}{2}\right)\right]}{\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma\left[e'_j-\lambda'_j+\lambda'_j\left(\frac{t}{N_1}-\frac{1}{2N_1}+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

$\omega(s, t)$ द्वारा क्रियात्मक फलन $\omega(s, t)=\omega(1-s, 1-t)$ की तुष्टि होती है। जब $p=0$ तो $Q'(s, t)$ को $Q'_1(s, t)$ द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा।

उपपत्ति

चूंकि $f(x, y)$ को (3·0) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है अतः प्रमेयिका के माध्यम से

$$f(x, y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\left(\frac{M}{N}\right)^{-s/2}\left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t/2} . Q(s, t)\ E(s, t) . x^{-s} . y^{-t}\, d s .dt$$

तथा $$g(x, y)=\frac{1}{xy}\int_0^x\int_0^y P\left[\log\frac{x}{z_1}, \frac{y}{z_2}\right] . dz_1\, dz_2$$

$$\times\left\{\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\left(\frac{M}{N}\right)^{-s/2} . \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t/2} Q(s, t) . E(s, t)\ z_1^{-s} . z_2^{-t}\, ds\, dt\right\}$$

$\log\frac{x}{z_1}=u, \log\frac{y}{z_2}=v$ रखने पर तथा समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$g(x, y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\left(\frac{M}{N}\right)^{-s/2} . \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t/2} Q(s, t) . E(s, t)$$

$$\times x^{-s} . y^t\, ds\, dt\int_0^\infty\int_0^\infty e^{(s-1)u}\, e^{(t-1)v} . P(u, v) . dn\, dv \tag{3·3}$$

अब (3·1) में दो चरों वाले लैप्लास परिवर्त के लिये प्रतीपन सूत्र का व्यवहार करने तथा s के लिये $1-s$ एवं t के लिये $1-t$ लिखने पर

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{(s-1)u} \cdot e^{(t+1)v} \cdot P(u, v) \cdot du \cdot dv = Q(1-s, 1-t)\, Q'(s, t) \cdot \omega(s, t) \qquad (3\cdot4)$$

(3·3) में (3·4) को व्यवहृत करने पर

$$g(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \int_{1/2i\infty}^{1/2i\infty} \left(\frac{M}{N}\right)^{-s/2} \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t/2} Q'(s, t) \cdot \phi(s, t)\, x^{-s} \cdot y^{-t}\, ds \cdot dt.$$

जहाँ $\phi(s, t) = Q(s, t) \cdot Q(1-s, 1-t) \cdot \omega(s, t) \cdot E(s, t)$ तथा $\phi(s, t)$ से सम्बन्ध $\phi(s, t) = \phi(1-s, 1-t)$ की तुष्ट होती है, अतः तुरन्त ही प्रमेयिका (3·2) प्राप्त होती है।

प्रमेय 2

यदि $f(x, y) = R^{M, M_1 : (a_p) : (d_{q_1}); (c_{p_1}) : (f_{q_2}); (e_{p_2})}_{N, N_1 : (\alpha_p) : (\delta_{q_1}); (\gamma_{p_1}) : (\mu_{q_2}); (\lambda_{p_2})}$

तथा $g(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty P(xz_1, yz_2) \cdot f(z_1, z_2) \cdot dz_1 \cdot dz_2$ (3·5)

$R^{M, M_1 : (a'_p) : (d'_{q_1}); (c'_{p_1}) : (f'_{q_2}); (e'_{p_2})}_{N, N_1 : (\alpha'_p) : (\delta'_{q_1}); (\gamma'_{p_1}) : (\mu'_{q_2}); (\lambda'_{p_2})}$ के तुल्य है

तो $$P(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+\infty} Q(s, t) \cdot Q'(s, t) \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^{-s} \cdot \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t} \cdot \omega(s, t) \cdot x^{-s}\, y^{-t}\, ds\, dt$$

$= 0,\ x<0, y<0 \qquad x>0, y>0$

जहाँ $\omega(s, t) = \omega(1-s, 1-t)$

उपपत्ति

(3·5) को $x^{s-1} \cdot y^{t-1}$, से गुणा करने, सीमा 0 से ∞ के मध्य समाकलित करने, $xz_1 = u$, $yz_2 = v$ रखने एवं समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर हमें (3·6) प्राप्त होता है।

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{s-1} \cdot y^{t-1} \cdot g(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_0^\infty \int_0^\infty z_1^{-s} \cdot z_2^{-t} f(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2 \times \left\{ \int_2^\infty \int_0^\infty u^{s-8} \cdot v^{t-1} P(u, v)\, du\, dv \right\} \qquad (3\cdot6)$$

चूँकि (3·0) सत्य है अतः (2·0) में मेलिन प्रतीपन सूत्र का व्यवहार करने $1-s$ को s तथा $1-t$ को t से प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{-s} \cdot y^{-t} \cdot f(x, y)\, dx \cdot dy = \left(\frac{M}{N}\right)^{s/2-1/2} \cdot \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{t/2-1/2} Q(1-s, 1-t) \cdot E(s, t) \tag{3·7}$$

इसी प्रकार यदि $g(x, y) = R^{M, M_1 : (a'_p) : (d'_{q_1}); (c'_{p_1}) : (f'_{q_2}); (e'_{p_2})}_{N, N_1 : (\alpha'_p) : (\delta'_{q_1}); (\gamma'_{p_1}) : (\mu'_{q_2}); (\lambda'_{p_2})}$

तो प्रमेयिका की सहायता से मेलिन उत्क्रमण सूत्र को व्यवहृत करने पर

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{s-1} \cdot y^{t-1} g(x, y) \cdot dx \cdot dy = \left(\frac{M}{N}\right)^{-s/2} \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t/2} Q'(s, t) \phi(s, t) \tag{3·8}$$

प्राप्त होता है जहाँ $\phi(s, t) = \phi(1-s, 1-t)$

(3·7) तथा (3·8) का व्यवहार करने पर (3·6) से हमें

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u^{s-1}\, v^{t-1} \cdot P(u, v) \cdot du \cdot dv = \left(\frac{M}{N}\right)^{-s} \cdot \left(\frac{M_1}{N_1}\right)^{-t} \cdot Q(s, t) \cdot Q'(s, t) \cdot \omega(s, t)$$

प्राप्त होता है जहाँ $\omega(s, t) = \left(\frac{MM_1}{NN_1}\right)^{1/2} \{Q(1-s, 1-t) \cdot Q(s, t)\}^{-1} \times \frac{\phi(s, t)}{E(s, t)}$

तथा $\omega(s, t)$ से $\omega(1-s, 1-t) = \omega(s, t)$ की तुष्टि होती है।

तब मेलिन उत्क्रमण सूत्र से वांछित फल प्राप्त होता है।

प्रमेय 3

यदि $f(x, y) = R^{M, M_1 : (a_p) : (d_{q_1}); (c_{p_1}) : (f_{q_2}); (e_{p_2})}_{N, N_1 : (\alpha_p) : (\delta_{q_1}); (\gamma_{p_1}) : (\mu_{q_2}); (\lambda_{p_2})}$

तथा $g(x, y) = \frac{1}{xy} \int_0^\infty \int_0^\infty P\left(\frac{z_1}{x}, \frac{z_2}{y}\right) f(z_1, z_2) \cdot dz_1\, dz_2$

$R^{M, M_1 : (a'_p) : (d'_{q_1}); (c'_{p_1}) : (f'_{q_2}); (e'_{p_2})}_{N, N_1 : (\alpha'_p) : (\delta'_{q_1}); (\gamma'_{p_1}) : (\mu'_{q_2}); (\lambda'_{p_2})}$ के तुल्य है

तब

$$P(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} Q'(1-s, 1-t) \cdot Q(s, t) \cdot \omega(s, t)\, x^{-s} \cdot y^{-t}\, ds \cdot dt$$

$x > 0, y > 0$

$= 0$ क्योंकि $x < 0, y < 0$

जहाँ $\omega(s, t) = \omega(1-s, 1-t)$

इसकी उपपत्ति प्रमेय 2 की ही जैसी है।

4. उपप्रमेय

अब हम प्रमेय 1 के लिये उपप्रमेय देंगे। इसी रीति से अन्य दो प्रमेयों के लिये भी उपप्रमेय प्राप्त किये जा सकते हैं।

उपप्रमेय 1

(1·4) का उपयोग करने पर

यदि $f(x, y)=R^{M, M_1 : -- : (d_{q_1}); (c_{p_1}) : (f_{q_2}); (e_{p_2})}_{N, N_1 : -- : (\delta_{q_1}); (\gamma_{p_1}) : (\mu_{q_2}); (\lambda_{p_2})}$

तथा $P(x, y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} Q_1(s, t) \,.\, Q_1'(1-s, 1-t) \,.\, \omega(s. t) \,.\, e^{sx} \,.\, e^{yt}\; ds \,.\, dt$

$x>0, y>0$

$=0$ क्योंकि $x<0, y<$

$\omega(s, t)=\omega(1-s, 1-t)$

तो $g(x, y)=\frac{1}{xy}\int_0^x\int^y \boldsymbol{P}\left[\log\frac{x}{z_1}, \log\frac{y}{z_1}\right] f(z_1, z_2) \,.\, dz_1\, dz_2$

$R^{M, M_1 : -- : (d'_{q_1}); (c'_{p_1}) : (f'_{q_2}); (e'_{p_2})}_{N, N_1 : -- : (\delta'_{q_1}); (\gamma'_{p_1}) : (\mu'_{q_2}); (\lambda'_{p_2})}$ के तुल्य है।

उपप्रमेय 2

(1·5) से तथा $\delta'_{q_1}=\gamma'_{p_1}=\mu_{q'_2}=\lambda'_{p_2}=1$ मानने पर

यदि $f(x, y)= R^{M, M_1 : -- : (d_{q_1}); (c_{p_1}) : (f_{q_2}); e_{p_2})}_{N, N_1 : -- : 1; 1 : 1; 1}$

तथा

$$P(x, y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\frac{\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma\left[d_j+\frac{s}{N}-\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right]}{\prod_{j=1}^{p_1}\Gamma\left[c_j+\frac{s}{N}-\frac{1}{2N}-\frac{1}{2}\right]}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma\left[f_j+\frac{t}{N_1}-\frac{1}{2N_1}+\frac{1}{2}\right]\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma\left[d'_j-\frac{s}{N}+\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right]}{\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma\left[e_j+\frac{t}{N_1}-\frac{1}{2N_1}-\frac{1}{2}\right]\prod_{j=1}^{p_1}\Gamma\left[c'_j-\frac{s}{N}+\frac{1}{2N}-\frac{1}{2}\right]}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{q_2} \Gamma\left[f'_j - \frac{t}{N_1} + \frac{1}{2N_1} + \frac{1}{2}\right]}{\prod_{j=1}^{p_2} \Gamma\left[e'_j - \frac{t}{N_1} + \frac{1}{2N_1} - \frac{1}{2}\right]} \omega(s, t) \,.\, e^{sx} \,.\, e^{yt}\, ds \,.\, dt, \quad x>0,\ y>0$$

$=0$ क्योंकि $x<0, y<0$

$(s, t)=(1-s, 1-t)$

तो $g(x, y)=\frac{1}{xy}\int_0^x\int_0^y P\left[\log\frac{x}{z_1}, \log\frac{y}{z_2}\right].f(z_1, z_2)\, dz, dz_2$

$R^{M, M_1 : -- : (d'_{q_1}); : (f'_{q_2}); (e'_{p_2})}_{N, N_1 : -- : 1; 1 : 1; 1}$ के तुल्य है ।

उपप्रमेय 3

(1·6) का सम्प्रयोग करने पर

यदि $f(x, y)$ तुल्य हो $R^{M, 1 : -- : (d_{q_1}); (c_{p_1}) : --; --}_{N, 1 : -- : (\delta_{q_1}); (\gamma_{p_1}) : --; --}$

तथा $$P(x, y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^{q_1} \Gamma\left[d_j+\delta_j\left(\frac{s}{N}-\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)\right]}{\prod_{j=1}^{p_1} \Gamma\left[c_j-\gamma_j+\gamma_j\left(\frac{s}{N}-\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{q_1} \Gamma\left[d'_j+\delta'_j\left(-\frac{s}{N}+\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)\right]}{\prod_{j=1}^{p_1} \Gamma\left[c'_j-\gamma'_j+\gamma'_j\left(-\frac{s}{N}+\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)\right]} \,.\, \omega(s, t) \,.\, e^{sx} \,.\, e^{yt} \,.\, ds \,.\, dt, \quad p>0,\ y>0$$

$=0$ क्योंकि $x<0, y<0$

तो $g(x, y)=\frac{1}{xy}\int_0^x\int_0^y P\left[\log\frac{x}{z_1}, \log\frac{y}{z_2}\right] .f(z_1, z_2) \,.\, dz_1 \,.\, dz_2$

तुल्य है $R^{M_1, 1 : (d'_{q_1}); (c'_{p_1}) : --; --}_{N, 1 : (\delta'_{q_1}); (\gamma'_{p_1}) : --; --}$

आगे भी, यदि हम $\begin{matrix} y\to 0 \\ t\to 0\end{matrix}$ लें और प्राचलों को थोड़ा बहुत समंजित कर लें तो पठान[4] का एक प्रमेय प्राप्त होगा, क्योंकि

$$P(x, 0)\equiv P(x),\ \omega(s, 0)\equiv\omega(s)$$

5. सम्प्रयोग

हम कतिपय फलनों के समाकल निरूपण का सम्प्रयोग (2·0) रूप को व्यक्त करने के लिये करेंगे जिससे उनकी आत्मव्युत्क्रमता ज्ञात हो सके

(1) माना कि $F(a, b)=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} f(a \sin \theta, b \sin \phi) \,.\, d\theta \,.\, d\phi$

यदि $K(s, t)$ $f(x, y)$ का मेलिन परिवर्त हो तो

$$F(a, b)=\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} K(s, t) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right) \,.\, \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \,.\, \Gamma\left(1-\frac{t}{2}\right)}$$

$$a^{-s} \,.\, b^{-t} \,.\, ds \,.\, dt \qquad (5\cdot1)$$

माना कि $f(x, y)=J_m(x) \,.\, J_{m_1}(y)$, जिससे कि

$$K(s, t)=\frac{2^{s+t-2}\ \Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{s}{2}\right) \,.\, \Gamma\left(\frac{m_1}{2}+\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{s}{2}+1\right) \,.\, \Gamma\left(\frac{m_1}{2}-\frac{t}{2}+1\right)}$$

तो (5·1) से

$$F(a, b)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} 2^{s+t}$$

$$\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m_1}{2}+\frac{t}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m_1}{2}+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{t}{2}\right)}\right.$$

$$\left. E(s, t) \,.\, a^{-s} \,.\, b^{-t} \right\} ds \,.\, dt$$

जहाँ $$E(s, t)=\frac{\pi}{16} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m+s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-s}{2}+1\right)}$$

$$\times\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{t}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_1+t+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m_1-t}{2}+1\right)}$$

जिससे कि $E(s, t)=E(1-s; 1-t)$

पुनश्च $F(a, b)=\int_0^{\pi/2}\int^{\pi/2} J_m(a \sin\theta) \,.\, J_{m_1}(b \sin\phi) \,.\, d\theta \,.\, d\phi$

$$=\frac{\pi^2}{4}!. \left\{J_{m/2}\left(\frac{a}{2}\right) . J_{m1/2}\left(\frac{b}{2}\right)\right\}^2$$

अतः हमें प्राप्त होगाः

$$\frac{\pi^2}{4}\left\{J_{m/2}\left(\frac{a}{2}\right) . J_{m1/2}\left(\frac{b}{2}\right)\right\}^2$$

$$=R_{2,\,2\,:\,--\,:\,1,\,1;\,1,\,1,\,:\,1,\,1;\,1\,,\,1}^{a^2/2,\,b^2/2\,:\,--\,:\,m/2-1/4,\,1/4,\,m/2+1/4;\,3/4\,:\,m_1/2-1/4,\,1/4.\,m_1/2+1/4;\,3/4}$$

(2) माना कि $F(a, b)=\int_0^1\int_0^1 f(ax, by) \,.\, dx \,.\, dy$

यदि $K(s, t)$ $f(x, y)$ का मेलिन परिवर्त हो तो

$$F(a, b)=\frac{1}{4(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} K(s, t) \,.\, \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} \,.\, \frac{\Gamma\left(\frac{1-t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-t}{2}\right)} \,.\, a^{-s} \,.\, b^{-t} \,.\, ds\, dt$$

$$R(s)>1,\ R(t)<1$$

माना कि $f((x, y)=J_v(x)\, J_{v+1}(x)\, J_{v_1}(y) J_{v_1+1}(y),\ R(v)>-1,\ R(v)>-1$

तो

$$F\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}\right)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{2^{s+t_1}\,\Gamma\left(\frac{1+s}{2}+v\right) . \Gamma\left(v+1+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

$$\times \frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+t}{2}+v_1\right) . \Gamma\left(v_1+1+\frac{t}{2}\right) . \Gamma\left(1+\frac{t}{2}\right) . \Gamma\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) . \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) . \Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right)}$$

$$\times E(s, t) \,.\, a^{-s} \,.\, b^{-t}\, ds\, dt$$

जहाँ $$E(s, t)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right) . \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) . \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{16\pi\Gamma\left(v+\frac{3-s}{2}\right) . \Gamma\left(v+1+\frac{s}{2}\right)\left\{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right) . \Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\right\}^2}$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{t}{2}\right) . \Gamma\left(1-\frac{t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right)}{\Gamma\left(v_1+\frac{3-t}{2}\right)\Gamma\left(v_1+1+\frac{t}{2}\right)\left\{\Gamma\left(\frac{3-t}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{t}{2}\right)\right\}^2}$$

स्पष्ट है कि $E(s, t) = E(1+s, 1-t)$.

और भी $F\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \int_0^1 \int_0^1 J_v\left(\frac{ax}{2}\right) . J_{v+1}\left(\frac{ax}{2}\right) . J_{v_1}\left(\frac{by}{2}\right) . J_{v_1+1}\left(\frac{by}{2}\right) dx\, dy$

$$= \frac{4}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left\{ J_{v+n+1}\left(\frac{a}{2}\right) J_{v_1+n_1+1}\left(\frac{b}{2}\right) \right\}^2$$

इस प्रकार

$$\frac{4}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left\{ J_{v+n+1}\left(\frac{a}{2}\right) J_{v_1+n_1+1}\left(\frac{b}{a}\right) \right\}^2$$

$$= R_{2,\, 2\, :\, --\, :\, 1,\, 1,\, 1,\, 1;\, 1\, :\, 1,\, 1,\, 1;\, 1,\, 1;\, 1}^{a^2/2,\, b^2/2\, :\, --\, :\, v1/4,\, v+3/4,\, 3/4,\, 3/4;\, 3/4,\, 5/4\, :\, v_1+1/4,\, v_1+3/4,\, 3/4,\, 3/4;\, 3/4,\, 5/4}$$

इसी प्रकार हम अन्य उदाहरण प्राप्त कर सकते हैं जिसमें $f(x, y)$ को

(i) $x^{v+1}\, y^{v_1+1}\, K_v(x)\, K_{v_1}(y)$

(ii) $x^v \,.\, y^{v_1}\, Y_v(x) \,.\, Y_{v_1}(y)$

(iii) $x^v\, y^{v_1} \,.\, J_v(x) \,.\, J_{v_1}(y)$

(iv) $x^v\, y^{v_1} \sin x \,.\, \sin y\, J_v(x) \,.\, J_{v_1}(y)$.

मानना होगा ।

निर्देश

1. चतुर्वेदी, के० के० तथा गोयल, ए० एन०, इण्डियन जर्न० प्योर ऐप्ला० मैथ०, 1972, 3, 357-60
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms. भाग I, भाग II, मैकग्राहिल, 1954
3. फाक्स, सी०, ट्रांजै० असे० मैथ० सोसा०, 1961, 395-429
4. पठान, एम० ए०, यूनि० राजस्थान स्टडीज इन मैथ०, 15-28
5. वाटसन, जी० एन०, Theory of Bessel Functions, द्वितीय संस्करण (केम्ब्रिज), 1958

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages 291-305

3H-परिवर्त के कुछ गुण

सी० के० शर्मा
गणित विभाग, एस० एस० एल० टी०, पी० वी० एम०, परसिया

[प्राप्त—फरवरी 19, 1976]

सारांश

Abstract

प्रस्तुत प्रपत्र में शर्मा द्वारा प्रचलित $3H$-परिवर्त के नाम से ज्ञात सार्वीकृत समाकल परिवर्त के कतिपय गुण दिये गये हैं। इसके पश्चात् इसके लिये परिवर्त युग्मों की सूची दी गई है।

Certain properties of the 3H-transform. *By* C. K. Sharma, Department of Mathematics, S. S. L. T., P. V. M., Parasia.

In the present paper, certain properties of generalized integral transform known as $3H$-transform introduced by Sharma have been given. Thereafter a list of transform pairs for this $3H$-transform has been provided.

1. भूमिका

शर्मा[3] ने एक नवीन समाकल परिवर्त की परिभाषा निम्न प्रकार से की है :

$$\phi(p)=\int_0^\infty (px)^{\sigma-1}\, H_{l,\, q+1}^{m+1,\, n}\left[a(px)^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix}(a_l, \alpha_l)\\ (b_0, \beta_0),(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right]$$

$$\times H_{L,\, Q+1}^{M+1,\, N}\left[A(px)^{\sigma'} \,\middle|\, \begin{matrix}(A_L, \alpha_L')\\ (B_0, \beta_0'), (B_Q, \beta_Q')\end{matrix}\right] H_{u,\, v}^{f,\, g}\left[C(px)^\mu \,\middle|\, \begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\ (d_v, \delta_v)\end{matrix}\right] f(x)\, dx \tag{1·1}$$

बशर्ते कि $\sigma>0,\ \sigma'>0,\ \mu>0\ \ x\neq 0,\ \beta<R(b_0/\beta_0)<\delta,\ \ \beta'<R(B_0/\beta_0')<\delta',\ |\arg ap^\sigma|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ $(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^\mu|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$, जहाँ

$$H_{u,\, v}^{f,\, g}\left[c(px)^\mu \,\middle|\, \begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\ (d_v, \delta_v)\end{matrix}\right]=\begin{cases}O(|x|^{\delta''}) & \text{यदि } x \text{ लघु हो}\\ O(|x|^{\beta''}) & \text{यदि } x \text{ दीर्घ हो}\end{cases}$$

$\delta''=\min R(d_i/\delta_i)\ (i=1, 2, \ldots, f)$,

$\beta_4''=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_1}\right)(i=1, 2, \ldots, g)$,

$\lambda''=\sum_1^g \gamma_j-\sum_{g+1}^u \gamma_j+\sum_1^f \delta_j-\sum_{f+1}^k \delta_j>0,\ A_3=\sum_1^v \delta_j-\sum_1^u \gamma_j>0$

तथा इसी प्रकार $\delta, \beta, \lambda, A_1$ एवं $\delta'. \beta', \lambda', A_2$ प्रथम दो H-फलनों के लिये आये हैं ।

$\phi(p)$ को हम $f(x)$ का $3H$-परिवर्त कह कर पुकारेंगे और (1·1) को केवल $\phi(p)=3H[f(x)]$ द्वारा व्यक्त करेंगे । (1·2)

प्राचलों को विशिष्ट मान प्रदान करने पर (1·1) से प्रदर्शित समाकल प्राय: लैप्लास, हैंकेल तथा फूरियर परिवर्त के समस्त विख्यात सार्वीकरणों में समानीत हो जाता है। पहले हम इस नवीन $3H$-परिवर्त (1·1) के कुछ गुण और फिर (1·1) के परिवर्त युग्मों की सूची देंगे ।

2. गुण I

यदि $\phi_r(p)=3H[f_r(x)](r=1, 2, \ldots, m)$

तो
$$\sum_{r=0}^m C_r\phi_r(p)=3H\left[\sum_{r=0}^m C_r f(x)\right], \tag{2·1}$$

जहाँ $C_r(1\leqslant r\leqslant m)$ सम्मिश्र संख्यायें हैं । m के सान्त होने पर फल नगण्य होता है किन्तु यदि m अनन्त हो तो (2·1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध होगा

(a) $\sum_{r=0}^\infty C_r f'_r(x)$ परिबद्ध अन्तराल $0\leqslant x\leqslant h(h>0)$ में अभिसरण करता है तथा

(b) या तो समाकल
$$\int_0^\infty \left|(px)^{\rho-1} H_{l,\ q+1}^{m+1,\ n}\left[a(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(a_l,\ \alpha_l)\\(b_0,\ \beta_0),(b_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right]\right.$$
$$\left.\times H_{L,\ Q+1}^{M+1,\ N}\left[A(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(A_L,\ \alpha_L')\\(B_0,\ \beta_0'),(B_Q,\ \beta_Q')\end{matrix}\right] H_{u,\ v}^{f,\ g}\left[c(px)^\mu \middle| \begin{matrix}(c_u,\ \gamma_u)\\(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right]\sum_{r=0}^\infty C_r f_r(x)\right| dx$$

अथवा श्रेणी
$$\sum_{r=0}^\infty \left|C_r\right| \int_0^\infty \left|(px)^{\rho-1} H_{l,\ q+1}^{m+1,\ n}\left[a(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(c_l,\ \alpha_l)\\(b_0,\ \beta_0),(b_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right]\right.$$
$$\left.\times H_{L,\ Q+1}^{M+1,\ N}\left[A(px)^{\sigma'} \middle| \begin{matrix}(A_L,\ \alpha_L')\\(B_0,\ \beta_0'),(B_Q,\ \beta_Q')\end{matrix}\right] H_{u,\ v}^{f,\ g}\left[c(px)^\mu \middle| \begin{matrix}(c_u,\ \gamma_u)\\(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right]\right| \left|f_r(x)\right| dx$$

अभिसारी है ।

उदाहरण 1

माना कि $f_r(x)=\frac{(-1)^r(1+\mu_1)_k}{r!\ (k-r)!\ (1+\mu_1)_r}$,

जहाँ $L_k^{\mu_1}(x)=\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^r(1+\mu_1)_k\, x^r}{r!\,(k-r)!\,(1+\mu_1)_r}$ सार्वीकृत लागेर बहुपद है जो अनृण संख्या k के लिये परिभाषित है। तो समाकल

$$\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\; H_{l,\;q+1}^{m+1,\;n}\left[a(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_l,\,\alpha_l)\\(b_0,\,\beta_0),\,(b_q,\,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{L,\;Q+1}^{M+1,\;N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L,\,\alpha'_L)\\(B_0,\,\beta'_0),\,(B_Q,\,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H_{u,\;v}^{f,\;g}\left[c(px)^\mu\left|\begin{matrix}(c_u,\,\gamma_u)\\(d_v,\,\delta_v)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{1}{\mu\beta_0}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r'}a^{\rho_{r'}}c^{-\rho'/\mu}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_{r'})}{r'\,!\,p\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_{r'})}$$

$$\times H_{L+v,Q+u+1}^{M+g+1,N+f}$$

$$\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\left|\begin{matrix}(A_N.\alpha'_N),(1-d_v-\rho'/\mu\;\delta_v,\sigma'/\mu\;\delta_v),\,(A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\,\ldots,\,(A_L,\,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_M,\,\beta'_M),(1-c_u-\rho'/\mu\;\gamma'_u,\sigma'/\mu\gamma_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\,\ldots,(B_Q,\,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]\quad(2\cdot2)$$

का प्रयोग करने पर जहाँ

$$\rho_{r'}=\frac{(b_0+r')}{\beta_0}\;,\;\rho'=\rho+\sigma\rho_{r'};$$

बशर्ते कि $\sigma,\,\sigma',\;\mu>0,\quad R(\rho+\sigma b_0/\beta_0+\sigma' B_0/\beta'_0+\mu\delta'')>0$, $|\arg ap^\sigma|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg A p^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^\mu|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$; जो प्रथम H-फलन के हेतु घात श्रेणी

$$H_{l,\;q+1}^{m+1,\;n}\left[ax^\sigma\left|\begin{matrix}(a_l,\,\alpha_l)\\(b_0,\,\beta_0),(b_q,\,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_r)}{r\,!\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{l}P(a_j-\alpha_j\rho_r)}\,a^{\rho_r}x^{\sigma\rho_r},\quad(2\cdot3)$$

का प्रयोग करने से प्राप्त होती है और फिर गुप्ता तथा जैन[1] के समाकल को व्यवहृत करने पर

$$\phi_r(p)=\frac{(-1)^r(1+\mu_1)_k}{r!\,(k-r)\,!\,(1+\mu_1)_r}\,\frac{1}{\mu\beta_0}$$

$$\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r'}a^{\rho_{r'}}c^{-\rho'/\mu}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_{r'})}{r'\,!\,p^{1+\rho'}\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha'_j\rho_{r'})}$$

$$\times H_{L+v,\;Q+u+1}^{M+gH,\;N+f}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\right.$$

$$\left.\left|\begin{matrix}(A_N,\,\alpha'_N),(1-d_v-\rho'/\mu\;\delta_v,\,\sigma'/\mu\;\delta_v),\,(A_{N+1},\,\alpha'_{N+1}),\,\ldots,\,(A_L,\,\alpha'_L)\\B_0,\,\beta'_0),(B_M,\,\beta'_M),\,(1-c_u-\rho'/\mu\;\gamma_u,\sigma'/\mu\;\gamma_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\,\ldots,\,(B_Q,\,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right],\quad(2\cdot4)$$

जहाँ $\rho_{r'}=\dfrac{(b_0+r')}{\beta_0}$, $\rho'=r+\rho+\sigma\rho_{r'}$;

बशर्ते कि σ, σ' $\mu>0$, $R[\rho+\sigma(b_0/\beta_0)+\sigma'(B'_0/\beta'_0)+\mu\delta'']>0$, $R[k+\rho+\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta'']<0$, $|\arg ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

अत: सान्त दशा के लिये उपर्युक्त गुणों के बल पर

$$\int_0^\infty (px)^{\rho-1}L_k^{\mu_1}(x)\, H_{l,\, q+1}^{m+1,\, n}\left[a(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_l, \alpha_l)\\(b_0, \beta_0),\ (b_q, \beta_q)\end{matrix}\right.\right] H_{L,\, Q+1}^{M+1,\, N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L, \alpha'_L)\\(B_0, \beta'_0),(B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{u,\, v}^{f,\, g}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u, \delta_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right.\right]dx=\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\left[\sum_{r=0}^{k} f_r(x)\right] H_{l,\, q+1}^{m+1,\, n}\left[a(px)^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_l, \alpha_l)\\(b_0, \beta_0),(b_q, \beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{L,\, Q+1}^{M+1,\, N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L, \alpha'_L\\(B_0, \beta'_0),\ (B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H_{u,\, v}^{f,\, g}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right.\right]dx=\sum_{r=0}^{k}\phi_r(p)$$

$$=\frac{(1+\mu_1)_k}{\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{k}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}a^{\rho_{r'}}c^{-\rho'/\mu}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_{r'})}{r!\,r'!\,(k-r)!\,(1+\mu_1)_r p^{1+\rho'}\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_{r'})}$$

$$\times H_{L+v,\ Q+u+1}^{M+g+1,\ N+f}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\left|\begin{matrix}(A_N, \alpha'_N),\ (1-d_v-\rho'/\mu\, \delta_v,\ \sigma'/\mu\, \delta_u),(A_{N+1}, \alpha'_{N+1}),\quad ,(A_L, \alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_M, \beta'_M),(1-c_u-\rho'/\mu\,\gamma_u,\ \sigma'/\mu\,\gamma_u),(B_{M+1}, \beta'_{M+1}),\ldots,(B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right], \tag{2·5}$$

प्राप्त होता है बशर्ते कि $\sigma, \sigma', \mu>0$, $R[\rho+\sigma(b_0/\beta_0)+\sigma'(B_0/\beta'_0)+\mu\delta'']>0$, $R(k+\rho+\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\delta'')<0$, $|\arg ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$, जहाँ $\delta, \beta, \lambda, \delta', \beta', \lambda'\ \delta'', \beta'', \lambda''$ संकेतों का अपना यथावत अभिप्राय है ।

उदाहरण 2

माना कि $$f_r(x)=\frac{(-1)^r(x/2)^{v+2r+1}}{r!\,\Gamma(r+3/2)\Gamma(v+r+3/2)},\ R(v+1)>0,$$

जहाँ $$H_v(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x/2)^{v+2r+1}}{r!\,\Gamma(r+3/2)\Gamma(v+r+3/2)},\ R(v+1)>0,$$

v कोटि का स्ट्रूव फलन है ।

समाकल (2·2) का व्यवहार करने पर

$$\phi_r(p)=\frac{(-1)}{\mu\beta_0\, r\,!\, 2^{\nu+2r+1}\Gamma(r+3/2)\Gamma(\nu+r+3/2)}$$

$$\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r'}\rho_{r'}\, p^{-\mu\rho_r+\rho_{r'}+\rho-1-\rho'}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_{r'})}{r'!\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-a_j\rho_{r'})}$$

$$\times H^{M+g+1,\ N+f}_{L+v,\ Q+u+1}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\mu}}\middle|\begin{matrix}(A_N,\alpha'_N),(1-d_v-\rho'/\mu\,\delta_v,\sigma'/\mu\,\delta_v),(A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ldots,(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_M,\beta'_M),(1-c_u-\rho'/\mu\,\gamma_u,\sigma'/\mu\,\gamma_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\ldots,(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right],\quad (2\cdot6)$$

जहाँ $\rho_r=(\rho+\nu+2r+1)/\nu,\ \rho_{r'}=\dfrac{(b_0+r')}{\beta_0},\ \rho'=\rho_r+\rho_{r'};$

बशर्ते कि $\sigma,\sigma',\mu>0,\ R[\rho+\nu+1+\sigma(b_0/\beta_0)+\sigma'(B_0/\beta'_0)+\mu\delta'']>0,\ R(\rho+\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta')<0,$ $|\arg ap^{\sigma}|<\tfrac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0),\ |\arg Ap^{\sigma}|<\tfrac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\tfrac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

अब उपर्युक्त नियम को सान्त दशा के लिये सम्प्रयुक्त करने पर

$$\int_0^{\infty}(px)^{\rho-1}H_\nu(x)\,H^{m+1,\ n}_{x,\ q+1}\left[a(px)^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_l,\alpha_l)\\(b_0,\beta'_0),(b_q,\beta'_q)\end{matrix}\right]H^{M+1,\ N}_{L,\ Q+1}\left[A(px)^{\sigma'}\middle|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right]$$

$$\times H^{f,\ g}_{u,\ v}\left[c(px)^{\mu}\middle|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right]dx=\sum_{r=0}^{\infty}\phi_r(p)$$

$$=\frac{1}{\mu\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}a^{\rho_{r'}}p^{-\mu\rho_r+\rho_{r'}+\rho-1}\,c^{-\rho'}}{r\,!\,r'\,!\,2^{\nu+2r+1}\Gamma(r+3/2)\Gamma(\nu+r+3/2)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-b_j-\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_{r'})}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_{r'})}$$

$$\times H^{M+g+1,\ N'f}_{L+v,\ Q+u+1}\left[\frac{A}{c^{\sigma'/\rho}}\middle|\begin{matrix}(A_N,\alpha'_N),(1-d_v-\rho'/\mu\delta_v,\sigma'/\mu\delta_v),(A_{N+1},\alpha'_{N+1}),\ldots,(A_L,\alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_M,\beta'_M),(1-c_u-\rho'/\mu\,\gamma_u,\sigma'/\mu\gamma'_u),(B_{M+1},\beta'_{M+1}),\ldots,(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right]\quad (2\cdot7)$$

जहाँ $\rho_r=(\rho+\nu+2r+1)/\mu,\ \rho_{r'}=\dfrac{(b_0+r')}{\beta_0},\ \rho'=\rho_r+\rho_{r'};$

बशर्ते कि $\sigma, \sigma', \mu>0$, $R[\rho+\nu+1+\sigma(b_0/\beta_0)+\sigma'(B_0/\beta'_0)+\mu\delta'']>0$: $R(\rho+\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta'')<0$, $|\arg ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi\lambda''>0)$.

गुण II :

यदि $$\frac{1}{p}\phi(p)=3H[f(x)],$$

तो $$\frac{1}{p}\phi(p/b)=3H[f(bx)], \tag{2·8}$$

जहाँ b कोई अशून्य सम्मिश्र संख्या है।

गुण III :

यदि $$\phi(p)=3H[f(x)],$$

तो $$\int_0^{\infty} p^{-k}\phi(p)\,dp=\frac{1}{\beta_0\beta'_0\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}a^{\rho_r}A^{\rho_{r'}}c^{-\rho'}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_r)}{r!\,r'!\quad\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_r)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(B_j-\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-A_j+\alpha'_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{f}\Gamma(d_j+\delta_j\rho')\prod_{j=1}^{g}\Gamma(1-c_j-\gamma_j\rho')}{\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-B_j+\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=N+1}^{L}\Gamma(A_j-\alpha'_j\rho_{r'})\prod_{j=f+1}^{v}\Gamma(1-d_j-\delta_j\rho')\prod_{j=g+1}^{u}\Gamma(c_j+\gamma_j\rho')}$$

$$\int_4^{\infty}x^{k-1}f(x)\,dx, \tag{2·9}$$

यदि $\rho'=(\rho-k+\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'})/\mu$, जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$ तथा $\rho_{r'}=\dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$;

बशर्ते कि (i) समाकल $\int_0^{\infty}x^{k-1}f(x)\,dx$ तथा $\int_0^{\infty}x^{-k}\phi(x)\,dx$ पूर्णतया अभिसारी हैं (जहाँ $k=c'+iT$, $-\infty<T<\infty$);

(ii) $f(x)$ बिन्दु $x=t$, $t>0$ के आसपास परिबद्ध विचरण वाला है।

(iii) $f(x)=O(x^{\mu_1})$, $R(\mu_1)>0$, लघु x के लिये

$=O(e^{-\mu_2 x})$, $R(\mu_2)>0$, दीर्घ x के लिये

(iv) $\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta''<R(k-\rho)<\sigma\ R(b_0/\beta_0)+\sigma'\ R(B_0/\beta'_0)+\mu\delta''$, $|\arg ax^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ $(\lambda>\sigma)$, $|\arg Ax^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cx^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

उपपत्ति :

पहले (2·3) की सहायता से प्रथम दो *H*-फलनों का श्रेणी प्रसार लिखकर समाकलन तथा संकलन का क्रम परस्पर विनिमय करके अन्त में ज्ञात फल

$$\int_0^\infty x^{\rho-1} H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[ax\left|\begin{matrix}(a_p,\,e_p)\\(b_q,\,f_q)\end{matrix}\right.\right]dx=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+f_j\rho)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-e_j\rho)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-f_j\rho)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+e_j\rho)}\,a^{-\rho}, \qquad (2{\cdot}10)$$

की सहायता से आन्तरिक समकलन का मान ज्ञात करने पर हमें (2·9) मिलता है।

उदाहरण

माना कि $f(x)=e^{-1/2x}\,W_{k_1,m_1}(x)$

(1·1) में $f(x)$ के लिये तथा प्रथम दो *H*-फलनों के लिये श्रेणी प्रसार के लिये मान रखने और समाकलन तथा संकलन के क्रम का परिवर्तन करने पर

$$\phi(p)=PP'p^{\rho+\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}-1}\int_0^\infty x^{\rho+\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}-1}e^{-1/2x}W_{k_1,m_1}(x)$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\,\gamma_u)\\(d_v,\,\delta_v)\end{matrix}\right.\right]dx, \qquad (2{\cdot}11)$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho'=\dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$, $P=\dfrac{1}{\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}$

$$\frac{(-1)^r}{r!}(a)^{\rho_r}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_r)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_r)},$$

तथा
$$\rho'=\frac{1}{\beta'_0}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r'}}{r'!}(A)^{\rho_{r'}}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(B_j-\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-A_j+\alpha'_j\rho_{r'})}{\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-B_j+\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=N+1}^{L}\Gamma(A_j-\alpha_j\rho_{r'})}$$

बशर्ते कि $\sigma,\,\sigma',\,\mu>0$, $R[\rho+\frac{1}{2}\pm m_1+\sigma(b_0/\beta_0)+\sigma'(B_0/\beta'_0)+\mu\delta'']>0$, $\beta<R(b_0/\beta_0)<\delta$, $\beta'<R\,(B_0/\beta'_0)<\delta'$.

अब ज्ञात समाकल [गुप्ता तथा जैन[1] की विशिष्ट दशा]

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,e^{-1/2x}\,W_{k,\mu}(x)\,H_{p,q}^{m,n}\left[zx^{\sigma}\left|\begin{matrix}(a_p,\,\alpha_p)\\(b_q,\,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]dx=H_{p+2,\;q+1}^{m,n+2}\left[z\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-\rho\pm\mu,\,\sigma),(a_p,\,\alpha_p)\\(b_q,\,\beta_q),(k-\rho,\,\sigma)\end{matrix}\right.\right], \qquad (2{\cdot}12)$$

जहाँ $\sigma>0$, $R(\rho\pm\mu+\frac{1}{2}+\sigma\delta)>0$ तथा $|\arg z|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$;

$$\phi(p)=PP'p^{\rho+\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}-1}\,H^{f,g+2}_{u+2,\,v+1}\left[cp^{\mu}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-\rho-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'}\pm m_1,\ \mu),\ (c_u,\ \gamma_u)\\(d_v,\ \delta_v),(k_1-\rho-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'},\ \mu)\end{matrix}\right.\right], \tag{2·13}$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'}=\dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$, P तथा P' (2·11) से प्राप्त किये जाते हैं ;

बशर्ते कि $\sigma,\sigma',\ \mu>0$, $R[\rho\pm m_1+\frac{1}{2}+\sigma(b_0/\beta_0)+\sigma'(B_0/\beta'_0)+\mu\delta'']>0$, $|\arg ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ $(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\pi\lambda'$ $(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

अब (2·9) के बाम पक्ष में

$$\int_0^\infty p^{-k}\phi(p)dp=PP'\int_0^\infty p^{\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}+\rho-k-1}\,H^{f,g+2}_{u+2,v+1}\left[cp^{\mu}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-\rho-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'}\pm m_1,\ \mu),(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v),(k_1-\rho-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'},\ \mu)\end{matrix}\right.\right]dp, \tag{2·14}$$

बशर्ते कि पदशः समाकलन विहित हो ।

(2·14) में फल (2·10) का सम्प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty p^{-k}\,\phi(p)dp=\frac{PP'c^{-\rho'}}{\mu}\,\frac{\prod_{j=1}^{f}\Gamma(d_j+\delta_j\rho')\prod_{j=1}^{g}\Gamma(1-c_j-\gamma_j\rho')\Gamma(\frac{1}{2}\pm m_1+k)}{\prod_{j=f+1}^{v}\Gamma(1-d_j-\delta_j\rho')\prod_{j=g+1}^{u}\Gamma(c_j+\gamma_j\rho')\Gamma(1-k_1+k)}, \tag{215}$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'}=\dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$ तथा $\rho'=(\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}+\rho-k)/\mu$

(2·9) का दाहिना पक्ष

$$\frac{PP'c^{-\rho'}\prod_{j=1}^{f}\Gamma(d_j+\delta_j\rho')\prod_{j=1}^{g}\Gamma(1-c_j-\gamma_j\rho')}{\prod_{j=f+1}^{v}\Gamma(1-d_j-\delta_j\,\rho')\prod_{j=g+1}^{u}\Gamma(c_j+\gamma_j\rho')}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-1/2x}W_{k1,m_1}(x)dx$$

$$=\frac{PP'c^{-\rho'}\prod_{j=1}^{f}\Gamma(d_j+\delta_j\rho')\prod_{j=1}^{g}\Gamma(1-c_j-\gamma_j\rho')\Gamma(k\pm m_1+\frac{1}{2})}{\mu\prod_{j=f+1}^{v}\Gamma(1-d_j-\delta_j\rho')\prod_{j=g+1}^{u}\Gamma(c_j+\gamma_j\rho')\Gamma(k-k_1+1)}, \tag{2·16}$$

जो (2·9) के बाम पक्ष के तुल्य है। इससे गुण III की पुष्टि हुई ।

गुण IV :

यदि $\frac{1}{p}\,\phi_1(p)=3H[\,f_1(x)]$ तथा $\frac{1}{p}\,\phi_2(p)=3H[\,f_2(x)]$,

जहाँ f_1 तथा $f_2(x)$ संतत हैं यदि $x>0$, तो

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,\phi_1(x)\,f_2(x)dx=\int_0^\infty \frac{1}{x}\,\phi_2(x)\,f_1(x)\,dx \tag{2·17}$$

बशर्ते कि (2·17) के दोनों समाकल पूर्णतया अभिसारी हैं।

उपपत्ति

$$\int_0^\infty \frac{1}{p}\,\phi_1(p)\,f_2(p)\,dp=\int_0^\infty \Big\{p\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\,H^{m+1,n}_{l,q+1}\Big[\,a(px)^\sigma\Big|{(a_l,\,\alpha_l) \atop (b_0,\,\beta_0),(b_q,\,\beta_q)}\Big]$$

$$\times H^{M+1,N}_{L,Q+1}\Big[A(px)^{\sigma'}\Big|{(A_L,\,\alpha'_L) \atop (B_0,\,\beta'_0),(B_Q,\,\beta'_Q)}\Big]\,H^{f,g}_{u,v}\Big[c(px)^\mu\Big|{(c_u,\,\gamma_u) \atop (d_v,\,\delta_v)}\Big]\,f_1(x)\,dx\Big\}\,\frac{1}{p}\,f_2(p)\,dp$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{x}\,f_1(x)\,\Big\{x\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\,H^{m+1,n}_{l,q+1}\Big[\,a(px)^\sigma\Big|{(a_l,\,\alpha_l) \atop (b_0,\,\beta_0),(b_q,\,\beta_q)}\Big]$$

$$\times H^{M+1,N}_{L,Q+1}\Big[A(px)^{\sigma'}\Big|{(A_L,\,\alpha'_L) \atop (B_0,\beta'_0),\,(B_Q,\,\beta'_Q)}\Big]\,H^{f,g}_{u,v}\Big[c(px)^\mu\Big|{(c_u,\,\gamma_u) \atop (d_v,\,\delta_v)}\Big]\,f_2(p)\,dp\Big\}dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{x}\,f_1(x)\,\phi_2(x)\,dx,$$

बशर्ते कि समाकलन के क्रम में परिवर्तन विहित हो।

इस प्रकार उपर्युक्त फल सिद्ध होता है बशर्ते कि सन्निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी हो।

गुण V :

यदि $\frac{1}{p}\,\phi(p)=3H[\,f(x)]$,

तो $$\int_0^\infty \frac{1}{p}\,\phi(p)dp=p\,.\,3H\Big[\int_0^\infty \frac{f(u)}{u}\,du\Big], \tag{2·18}$$

बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व हो।

उपपत्ति

गुण II के अनुसार $\phi(p)=p\,.\,3H[\,f(x)]$,

अत: $\phi(p/t)=p\,.\,3H[\,f(tx)]$,

तो $\int_0^\infty \frac{1}{t}\,\phi(p/t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}\left\{\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\; H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^\sigma \left|\begin{matrix}(a_l,\ \alpha_l)\\(b_0,\ \beta_0),(b_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right.\right]\right.$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L,\ \alpha_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu\left|\begin{matrix}(c_u,\ \gamma_u)\\(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right.\right] f(tx)\,dx\right\} dt$$

$$=p\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\; H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_l,\ \alpha_l)\\(b_0,\ \beta_0),(b_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right.\right] H_{L,\ Q+1}^{M+1,\ N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L,\ \alpha'_L)\\(B_0,\ \beta'_0),(B_Q,\ \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu\left|\begin{matrix}(c_u,\ \gamma_u)\\(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right.\right]\left\{\int_0^\infty \frac{f(tx)}{t}\,dt\right\} dx, \tag{2·19}$$

बशर्ते कि समाकलन के क्रम में परिवर्तन विहित हो ।

यदि (2·19) के बाम पक्ष में $t=p/x$ रखें तो इससे (2·18) का बाम पक्ष प्राप्त होता है । $t=u/x$ लेने पर $\int_0^\infty \frac{1}{t} f(tx)\,dt$ समाकल $\int_0^\infty \frac{1}{u} f(u)\,du$ में समानीत हो जाता है और इस तरह से (2·19) का दाहिना पक्ष (2·18) के दाहिने पक्ष में समानीत होता है ।

गुण VI :

यदि $\frac{1}{p}\,\phi(p)=3H[f(x)],$

तो $$\int_p^\infty \frac{1}{p}\,\phi(p)\,dp = p\ .\ 3H\left[\int_0^t \frac{1}{u} f(u)\,du\right], \tag{2·20}$$

बशर्ते कि समाकल का अस्तित्व रहे ।

उपपत्ति

गुण II का पुनः उपयोग करने पर

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\phi(p/t)\,dt = \int_0^1 \frac{p}{t}\left\{\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\; H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_l,\ \alpha_l)\\(b_0,\ \beta_0),(q_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right.\right]\right.$$

$$\times H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L,\ \alpha'_L)\\(B_0,\ \beta'_0),(B_Q,\ \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu\left|\begin{matrix}(c_u,\ \gamma_u)\\(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right.\right] f(tx)\,dx\right\}dt$$

$$=p\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\, H_{l,q+1}^{m+1,n}\left[a(px)^\sigma\left|\begin{matrix}(a_l,\ \alpha_l)\\(b_0,\ \beta_0),(b_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right.\right] H_{L,Q+1}^{M+1,N}\left[A(px)^{\sigma'}\left|\begin{matrix}(A_L,\ \alpha'_L)\\(B_0,\ \beta'_0),(B_Q,\ \beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{u,v}^{f,g}\left[c(px)^\mu\left|\begin{matrix}(c_u,\ \gamma_u)\\(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right.\right]\left\{\int_0^1 \frac{1}{t} f(tx)\,dt\right\} dx, \tag{2·21}$$

बशर्ते कि समाकलन के क्रम में परिवर्तन विहित हो ।

यदि (2·18) प्राप्त करने के लिये वे ही प्रतिस्थापन (2·19) में किये जायँ तो (2·21) समानीत होकर (2·20) प्रदान करेगा।

गुण VII:

यदि $\frac{1}{p}\,\phi(p)=3H[f(x)]$,

तो $$\int_0^p \frac{1}{p}\,\phi(p)\,dp=p\,.\,3H\Big[\int_t^\infty \frac{1}{x}\,f(x)\,dx\Big], \qquad (2\cdot22)$$

बशर्ते कि समाकल का अस्तित्व हो।

उपपत्ति

इसकी उपपत्ति गुण *VI* की उपपत्ति जैसी है। हमें (2·21) में केवल समाकलन की सीमाओं को (0, 1) से (1, ∞) में बदलना होगा।

गुण VIII :

यदि $\frac{1}{p}\,\phi(p)=3H[f(x)]$,

तो $$-p\,\frac{d}{dp}\,[\phi(d)]=p.\;3H\Big[x\frac{d}{dx}f(x)\Big], \qquad (2\cdot23)$$

दोनों पक्षों का अस्तित्व हो और वे संतत हों।

उपपत्ति

गुण II के अनुसार $\phi(p/t)=p\,.\,3H[f(tx)]$.
दोनों पक्षों को t के प्रति अवकलित करने और फिर $t=1$ रखने पर हमें (2·23) प्राप्त होता है।

उपप्रमेय

गुण VIII के बारम्बार सम्प्रयोग से हमें

$$\Big(-p\,\frac{d}{dp}\Big)^r[\phi(p)]=p\,.\,3H\Big[\Big(x\,\frac{d}{dx}\Big)\Big]^r f(x)\Big], \qquad (2\cdot24)$$

प्राप्त हो सकता है बशर्ते कि दोनों पक्षों का अस्तित्व हो और वे संतत हों।

गुण IX :

यदि $\frac{1}{p}\;\phi_1(p)=3H[f_1(p)]$ तथा $\frac{1}{p}\,\phi_2(p)=3H[f_2(x)]$,

जहाँ $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ संतत हैं $(x>0)$, तो

$$3H\left[\int_0^\infty \phi_2(y)\, f_1(xy)\, \frac{dy}{y}\right]=3H\left[\int_0^\infty \phi_1(y)\, f_2(xy)\, \frac{dy}{y}\right], \qquad (2{\cdot}25)$$

बशर्ते कि (2·25) के दोनों समाकलों का अस्तित्व हो ।

उपपत्ति

$$3H\left[\int_0^\infty \phi_2(y)\, f_1(xy)\, \frac{dy}{y}\right]=\int_0^\infty \frac{1}{y}\, \phi_2(y)\left\{\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\, H^{m+1,n}_{l,q+1}\left[a(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(a_l, \alpha_l)\\(b_0,\beta_0),(b_q, \beta_q)\end{matrix}\right]\right.$$

$$\left.\times H^{M+1,N}_{L,Q+1}\left[A(px)^{\sigma'} \middle| \begin{matrix}(A_L, \alpha')\\(B_0, \beta'_0),(B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right] H^{f,g}_{u,v}\left[c(px)^\mu \middle| \begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right] f_1(dy)\, dx\right\}dy$$

$$=\int_0^\infty \phi_2(y)\, \phi_1(p/y)\, \frac{dy}{y}\,. \qquad (2{\cdot}26)$$

बशर्ते कि समाकलनों के क्रम में परिवर्तन विहित हो ।

इसी प्रकार से अनुगमन करते हुये

$$3H\left[\int_0^\infty \phi_1(y)\, f_2(xy)\, \frac{dy}{y}\right]=\int_0^\infty \phi_1(y)\, \phi_2(p|y)\, \frac{dy}{y}\,. \qquad (2{\cdot}27)$$

(2·7) में $p/y=z$ रखने पर हमें (2·26) प्राप्त होता है ।

परिवर्त युग्म

निम्नांकित परिवर्त युग्मों में आये संकेत $\delta, \beta, \lambda, \delta', \beta', \lambda', \delta'', \beta'', \lambda''$ $3H$-परिवर्त (1·1) में दिये हैं

$f(x)$

$$\phi(p)=\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\, H^{m+1,n}_{l,q+1}\left[a(px)^\sigma \middle| \begin{matrix}(a_l, \alpha_l)\\(b_0, \beta_0),(b_q, \beta_q)\end{matrix}\right]$$

$$H^{M+1,N}_{L,Q+1}\left[A(px)^{\sigma'} \middle| \begin{matrix}(A_L, \alpha'_L)\\(B_0,\beta'_0),(B_Q, \beta'_Q)\end{matrix}\right] H^{f,g}_{u,v}\left[c(px)^\mu \middle| \begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right] f(x)\, dx.$$

k अचर

$$\frac{k}{\beta_0\beta'_0}\sum_{r=0}^\infty \sum_{r'=0}^\infty \frac{(-1)^{r+r'} a^{\rho_r} A^{\rho_{r'}} c^{-\rho'} \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j-\beta_j\rho_r) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_r) \prod_{j=1}^M \Gamma(B_j-\beta'_j\rho_{r'})}{r!\, r'!\, \mu p \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r) \prod_{j=n+1}^l \Gamma(a_j-\alpha_j\rho_r) \prod_{j=M+1}^Q \Gamma(1-B_j+\beta'_j\rho_{r'})}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^N \Gamma(1-A_j+\alpha_j\rho_{r'}) \prod_{j=1}^f \Gamma(d_j+\delta_j\rho') \prod_{j=1}^g \Gamma(1-c_j-\gamma_j\rho')}{\prod_{j=N+1}^L \Gamma(A_j-\alpha'_j\rho_{r'}) \prod_{j=f+1}^v \Gamma(1-d_j-\delta_j\rho') \prod_{j=g+1}^u \Gamma(c_j+\gamma_j\rho')}, \qquad (3{\cdot}1)$$

जहाँ $\rho_r = \dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'} = \dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$, $\rho' = \dfrac{\sigma\rho_r + \sigma'\rho_{r'} + \rho + 1}{\mu'}$; $\sigma, \sigma', \mu > 0$,
$\sigma\beta + \sigma'\beta' + \mu\beta'' < R(-\rho) < \sigma(b_0/\beta_0) + \sigma'(B_0/\beta'_0) + \mu\delta''$, $|\arg ap^{\sigma}| < \frac{1}{2}\lambda\pi (\lambda > 0)$,
$|\arg Ap^{\sigma'}| < \frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda' > 0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}| < \frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda'' > 0)$.

$(1-x)^{-m_1}$

$$\frac{1}{\beta_0\beta'_0\Gamma(m_1)} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+r'}}{r!\,r'!} a^{\rho_r} A^{\rho'} p^{\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}+\rho-1} \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_r)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_r)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(B_j-\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-A_j+\alpha'_j\rho_{r'})}{\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-B_j+\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=N+1}^{L}\Gamma(A_j-\alpha'_j\rho_{s'})} H_{u+1,v+1}^{f+1,g+1}\left[cp^{\mu}\left|\begin{matrix}(1-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'}-\rho,\mu),(c_u,\gamma_u)\\ (m_1-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'}-\rho,\mu),(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right.\right], \quad (3\cdot2)$$

जहाँ $\rho_r = \dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'} = \dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$; $\sigma, \sigma', \mu, \beta_0, \beta'_0 > 0$, $\beta < R(b_0/\beta_0) < \delta, \beta < R(B_0/\beta'_0) < \delta'$, $(b_j - \beta_j\rho_r)(j=1, 2, \ldots, m, r=0, 1, 2, \ldots)$ तथा $(B_j - \beta'_j\rho_{r'})$ $(j=1, 2, \ldots, M, r'=0, 1, 2, \ldots)$ शून्य या ऋण संख्या नहीं हैं ; $\sigma\beta + \sigma'\beta' + \mu\beta'' - m_1 < R(-\rho) < \sigma(b_0/\beta_0) + \sigma'(B_0/\beta'_0) + \mu\delta''$, $|\arg ap^{\sigma}| < \frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda > 0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}| < \frac{1}{2}\lambda'\pi(\delta' > 0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}| < \frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda'' > 0)$.

$e^{-1/2x}$
$M_{k_1,m_1}(x)$

$$\frac{\Gamma(2m_1+1)}{\beta_0\beta'_0\Gamma(m_1+k_1+\frac{1}{2})} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+r'} a^{\rho_r} A^{\rho_{r'}} p^{\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}+\rho-1}}{r!\,r'!}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1+a_j+\alpha_j\rho_r)\prod_{j=1}^{M}\Gamma(B_j-\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1=A_j+\alpha'_j\rho_{r'})}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_r)\prod_{j=m+1}^{Q}\Gamma(1-B_j+\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=N+1}^{L}\Gamma A_j-\alpha'_j\rho_{r'})}$$

$$H_{u+2,v+1}^{f+1,g+1}\left[cp^{\mu}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-m_1-\rho-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'},\mu),(c_u,\gamma_u),(\frac{1}{2}+m_1-\rho-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'},\mu)\\ (k_1-\rho-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'},\mu),(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right.\right], \quad (3\cdot3)$$

जहाँ $\rho_r = \dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'} = \dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$; $\sigma, \sigma', \mu, \beta_0, \beta'_0 > 0$, $\beta < R(b_0/\beta_0) < \delta$, $\beta' < R(B_0/\beta'_0) < \delta'$, $(b_j - \beta_j\rho_r)$ $(j=1, 2, \ldots, m;\ r=0, 1, 2, \ldots)$ तथा $(B_j - \beta'_j\rho_{r'})$

($j=2, 2, \ldots, M; r'=0, 1, 2, \ldots$) शून्य या ऋण संख्या नहीं हैं r; $\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta''+k_1<R(-\rho)<\sigma(b_0/\beta_0)+\sigma'(B_0/\beta'_0)+\mu\delta''+m_1+\frac{1}{2}$, $|\arg ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

$e^{-1/4x^2}\ D_{-v}(x)$

$$\frac{\sqrt{(\pi)}}{\beta_0\beta'_0(\sqrt{2})^v}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}a^{\rho_r}A^{\rho_{r'}}p^{\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}+\rho-1}}{r!\,r!\,(\sqrt{2})^{\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}+\rho-1}}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(bj-\beta_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_r)\prod_{j=1}^{M}\Gamma(B_j-\beta_j\rho_{r'})\prod_{j=4}^{N}\Gamma(1-A_j+\alpha'_j\rho_{r'})}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j\rho_r)\prod_{j=m+1}^{Q}\Gamma(1-B_j+\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=N+1}^{L}\Gamma(A_j-\alpha_j\rho_{r'})}$$

$$H_{u+1,v+1}^{f,g+1}\left[\frac{cp^{\mu}}{(\sqrt{2})^{\mu}}\middle|\begin{matrix}(1-\sigma\rho_r-\sigma'\rho_{r'}-\rho,\ \mu),(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v),(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\sigma\rho_r-\frac{1}{2}\lambda\ \sigma'\rho_{r'},\ \frac{1}{2}\mu)\end{matrix}\right], \quad (3\cdot4)$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'}=\dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$; $\sigma, \sigma', \mu, \beta_0, \beta'_0>0$, $\beta<R(b_0/\beta_0)<\delta$, $\beta'<R(B_0/\beta_0')<\delta'$, $(b_j-\beta_j\rho_r)(j=1, 2, \ldots, m; r=0, 1, 2, \ldots)$ तथा $(B_j-\beta'_j\rho_{r'})(j=1, 2, \ldots, M; r=0, 1, 2, \ldots)$ शून्य या ऋण संख्या नहीं हैं। $R(\rho+\sigma b_0/\beta_0+\sigma' B_0/\beta'_0+\mu\delta'')>0$, $|\arg ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

$$H_{s,t}^{k,l}\left[b'x^v\middle|\begin{matrix}(A'_s,\eta_s)\\(B'_t,\xi_t)\end{matrix}\right]\ \frac{1}{\nu\beta_0\beta'_0}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r'}}{r!\,r'!}a^{\rho_r}A^{\rho_{r'}}p^{\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}-\rho-1}(b')^{-(\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}-\rho)/v}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_r)\prod_{j=1}^{M}\Gamma(B_j-\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-A_j+\alpha_j\rho_{r'})}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)\prod_{j=n+1}^{l}\Gamma(a_j-\alpha_j d_r)\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-B_j+\beta'_j\rho_{r'})\prod_{j=N+1}^{L}\Gamma(A_j-\alpha'_j\rho_{r'})}$$

$$H_{u+t,v+s}^{f+l,g+k}\left[\frac{cp^{\mu}}{(b')^{\mu/v}}\middle|\begin{matrix}(c_g,\gamma_g),(1-B'_t-(\sigma\rho_r+\sigma'\rho_{r'}-\rho)/v\ \xi_t,\mu/v\xi_t),(c_{g+1},\gamma_{g+1}),\ldots,(c_u,\gamma_u)\\(d_f,\delta_f),(1-A'_s-(\sigma\rho_r+\alpha'\rho_{r'}-\rho)/v\ \eta_s,\ \mu/v\ \eta_s),(d_{f+1},\delta_{f+1}),\ldots,(d_v\ \delta_v)\end{matrix}\right], \quad (3\cdot5)$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{(b_0+r)}{\beta_0}$, $\rho_{r'}=\dfrac{(B_0+r')}{\beta'_0}$, $\sigma, \sigma', \mu, \nu, \beta_0, \beta'_0>0$, $\beta<R(b_0/\beta_0)<\delta$, $\beta'<R(B_0/\beta'_0)<\delta'$, $(b_j-\beta_j\rho_r)(j=1, 2, \ldots, m; r=0, 1, 2, \ldots)$ तथा $(B_j-\beta'_j\rho_{r'})(j=1, 2, \ldots, M; r'=0, 1, 2, \ldots)$ शून्य या ऋण पूर्ण संख्या नहीं है, $\sigma\beta+\sigma'\beta'+\mu\beta''+\nu\beta'''$

$<R(-\rho)<\sigma(b_0/\beta_0)+\sigma'(B_0/\beta'_0)+\mu\delta''+\nu\delta'''$, $|\arg ap^{\sigma}|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda>0)$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda\pi(\lambda'>0)$, $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$, $|\arg b'<\frac{1}{2}\lambda'''\pi(\lambda'''>0)$, सहित $\delta'''\equiv\min R(B'_h/\xi_h)(h=1, 2, \ldots, k)$, $\beta'''=\max R\left(\frac{A'_i-1}{\eta_i}\right)(i=1, 2, \ldots, l_1)$ तथा

$$\lambda'''\equiv \sum_1^k \xi_j-\sum_{k+1}^t \xi_j+\sum_1^{l_1}\eta_i-\sum_{l_1+1}^s \eta_j>0.$$

निर्देश

1. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, अप्रकाशित
2. शर्मा, सी० के०, Portugaliae Mathematica, 1974, 33,

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October 1977, Pages 307-313

एल्यूमिनियम एवं मैन्डेलिक अम्ल के सवर्गीय यौगिक

दिनेश चन्द्र रूपैनवार

प्रयुक्त रसायन अनुभाग, तकनीकी संस्थान,

बनारस हिन्दू विश्वविद्यलाय, वाराणसी

[प्राप्त—नवम्बर 18, 1976]

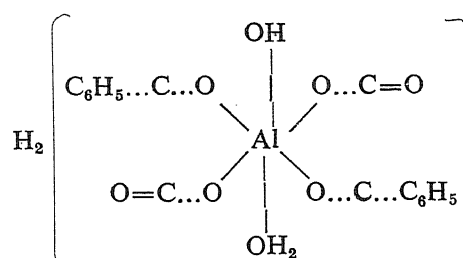
सारांश

जलीय मैंडेलिक अम्ल में नव अवक्षेपित एल्यूमिनियम हाइड्राक्साइड की विलेयता का अध्ययन करने से दो जटिल यौगिक प्राप्त हुये जिनकी संरचना का अध्ययन किया गया है ।

Abstract

Coordination compounds of aluminium and mandelic acid. *By* D. C. Rupainwar, Applied Chemistry Division, Institute of Technology, B. H. U., Varanasi.

The aluminum (III)-mandelic acid-water system has been critically re-examined by studying the interaction of the freshly precipitated $Al(OH)_3$ in aqueous solutions of mandelic acid. A new crystalline alumino-mandelic acid complex has been isolated, characterised and its structure established as

$$H_2\left[\begin{array}{ccccc} & & OH & & \\ C_6H_5\ldots C\ldots O & & | & & O\ldots C{=}O \\ & \diagdown & | & \diagup & \\ & & Al & & \\ & \diagup & | & \diagdown & \\ O{=}C\ldots O & & | & & O\ldots C\ldots C_6H_5 \\ & & OH_2 & & \end{array}\right]$$

It was deduced that the formation of a higher complex with a 1:3 metal to ligand ratio could not be ascertained and all attempts to isolate it from solution resulted in

the separation of the above more stable complex or the basic salt HO...Al. (OOC·CH (OH)$C_6H_5)_2$. The mechanism for these changes has been discussed.

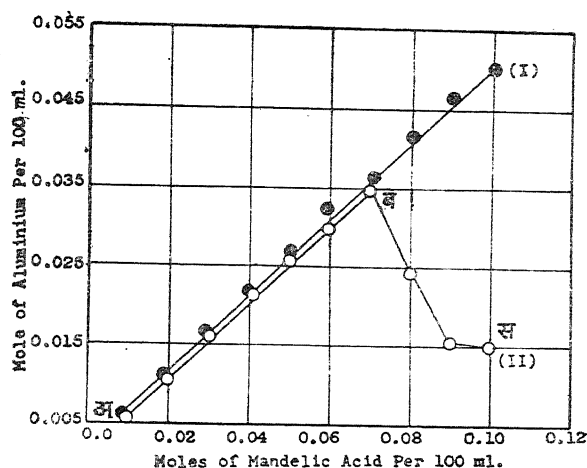
साधारणतया एल्यूमिनियम हाइड्राक्साइड जल के 1 अथवा 3 से संयुक्त होकर दो प्रकार के अणु बनाता है जो क्रमशः $H[Al(OH)_4]$ और $H_3[Al(OH)_3]$ सूत्रों द्वारा प्रदर्शित किये जा सकते हैं। रासायनिक साहित्य में उक्त लिखित अणुओं के अनेक संजातों का, जो कि वास्तव में 4 और 6 सवर्गीकरणांक के जटिल यौगिक हैं, उल्लेख किया गया है। जटिल यौगिक जिनमें कार्बनिक लिगैन्ड के रूप में आक्सैलेट, मैलोनेट [1], टार्टरेट [2], सैलिसिलेट [3] और सिट्रेट [4] प्रयुक्त हुए हैं, बनाये जा चुके हैं। इधर कुछ वर्षों से ही लिगैन्ड के रूप में मैन्डेलेट ने कई रसायनज्ञों का ध्यान आकर्षित किया है। श्रीवास्तव और मनोहर [5] ने भौतिकी-रासायनिक अध्ययनों से यह प्रदर्शित किया कि एल्यूमिनियम मैन्डेलिक अम्ल के साथ तीन कीलेट बनाता है जिनके धातु एवं अम्ल के अनुपात क्रमशः 1 : 1, 1 : 2 और 1 : 3 हैं। मेहरोत्रा और सहकर्मियों [6] ने एल्यूमिनियम आइसो-प्रोपाक्साइड अथवा एल्यूमिनियम क्लोराइड की मैन्डेलिक अम्ल से अजल विलायकों में अभिक्रिया से नार्मल एल्यूमिनियम मैन्डेलेट प्राप्त किया। लेखक ने अपने त्रिसंयोजक गैलियम [7], इन्डियम [8] एवं थैलियम [9] के मैन्डेलिक अम्ल के साथ बने जटिल यौगिकों के संदर्भ में यह आवश्यक समझा कि एल्यूमिनियम-मैन्डेलिक-अम्ल-जल व्यवस्था का पुनर्वीक्षण किया जाये, इसके लिये जलीय मैन्डेलिक अम्ल में नव अवक्षेपित एल्यूमिनियम हाइड्राक्साइड की विलेयता का अध्ययन करने से दो जटिल यौगिक प्राप्त हुए जिनकी संरचना का अध्ययन किया गया।

पिछले कुछ वर्षों में मैन्डेलिक अम्ल के जटिल यौगिक Ca^{2+}[10], Mo^{3+}[11], Fe^{3+}[12] UO_2^{2+}[13], Co^{2+}[14], Zn[15] आदि धनायनों तथा मालिब्डिक, टंगस्टिक [16], जर्मेनिक [17], वैनेडिक [18] एवं बोरिक [19] अम्लों के साथ अध्ययन किये गये हैं।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत कार्य में एल्यूमिनियम हाइड्राक्साइड तथा मैन्डेलिक अम्ल की अभिक्रिया का अध्ययन दो श्रेणी के प्रयोगों द्वारा किया गया है। प्रथम श्रेणी में ताजे अवक्षेपित किये गये एल्यूमिनियम हाइड्राक्साइड को अधिक मात्रा में 100 मि०ली० मैन्डेलिक अम्ल के जलीय विलयन के साथ, जिनका सांद्रण 0·01M से 0·1 M के बीच था, 250 मि०ली० अर्लेनमेयर फ्लास्कों में मिलाया गया। दूसरी श्रेणी में जिसमें प्रथम श्रेणी के एक रूप प्रतिदर्श थे किन्तु हाइड्राक्साइड की मात्रा को इस प्रकार निर्धारित किया गया कि अन्तिम कुछ प्रतिदर्शों में एल्यूमिनियम और मैन्डेलिक अम्ल का अनुपात 1 : 3 से कुछ अधिक ही रहे। इन सारे मिश्रणों को एक हल्लित्र में कक्ष ताप पर लगभग चौबीस घंटे तक हिलाया गया। तत्पश्चात् प्रत्येक फ्लास्क में से, रूई से मुह बन्द किये पिपेट द्वारा, एक ही मात्रा में अशेषभाजक लिया गया और उसमें एल्यूमिनियम की मात्रा का साधारण आक्सीनेट विधि द्वारा विश्लेषण किया गया। परिणाम लेखाचित्र के रूप में चित्र 1 में प्रस्तुत किये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

चित्र 1 में दो वक्र (I) और (II) दिखाये गये हैं जो क्रमशः प्रयोग की दो श्रेणियों का प्रतिदर्शन करते हैं। इसमें विलेय एल्यूमिनियम की ग्रामाणु प्रति 100 मि० ली० मात्रा को मैन्डेलिक अम्ल के ग्रामाणु

चित्र 1

सान्द्रण के विरोध में आलेखित किया गया है। वक्र (I) एक सीधी रेखा है जिसमें धातु और लिगैन्ड का अनुपात लगातार 1 : 2 ही है और जो इस क्षेत्र में सवर्गीय यौगिक का रूप प्रदर्शित करता है।

वक्र (II) में सीधी रेखा अ स ब क्षेत्र प्रदर्शित करती है जिसमें मैन्डेलिक अम्ल की मात्रा कम और $Al(OH)_3$ का आधिक्य है। वक्र (I) की ही तरह यह भी एक विलेय यौगिक, जिसमें धातु व लिगैन्ड का अनुपात 1 : 2 है, का बनना प्रदर्शित करता है। बिन्दु ब के बाद वक्र में एकाएक विलेय एल्यूमिनियम का अभाव होता है जो कि वक्र (II) के भाग ब स से प्रदर्शित है। इससे यह अनुमान लगाया जा सकता है कि Al(III) का एक बड़ा भाग जो कदाचित एक अविलेय समाक्षारीय मैन्डेलेट बनने में प्रयुक्त होता है, विलयन से पृथक हो जाता है। यह भी देखा गया कि इस प्रकार का अवक्षेपण बहुत समय तक रखने अथवा ओजपूर्वक हिलाने से अधिकाधिक ही होता है।

विलेय जटिल यौगिक वाले फ्लास्कों के छनित को धीरे-धीरे जल ऊष्मक पर वाष्पन करने से एक गाढ़ा द्रव मिला जिसमें एथेनॉल डालने पर एक श्वेत क्रिस्टलीय ठोस प्राप्त हुआ। इस ठोस को छानकर एथेनॉल-जल मिश्रण व ईथर से धोकर हवा में सुखाकर एल्यूमिनियम एवं मैन्डेलेट [20] का विश्लेषण किया गया।

प्राप्त Al=7·42%; मैन्डेलेट=82.40%; H_2O=10=12%

$C_{16}H_{17}O_8Al$ के लिये गणित Al=7·41; मैन्डेलेट=82·38%; H_2O=9·88%

ऊपर दिया गया अणु सूत्र बरोस एवं वार्कस [3] द्वारा बनाये गये एल्यूमिनो सैलिसिलिक अम्ल जटिल यौगिक के अनुरूप है और प्रयोगात्मक फलों द्वारा सही प्रदर्शित होता है।

यह जटिल यौगिक पानी में विलेय एथेनॉल में अल्प विलेय किन्तु ईथर, कार्बनटेट्राक्लोराइड, क्लोरोफार्म, बेन्जीन इत्यादि में अविलेय है। इस यौगिक का निष्कर्षण इसके जलीय घोल से किसी भी कार्बनिक निष्कर्षक जैसे एथिल ऐसीटेट, ऐमिल ऐसीटेट, ट्राइब्यूटिफासफेट अथवा उच्च श्रेणीय एल्कोहलों द्वारा नहीं किया जा सकता। जल में इस यौगिक की विलेयता कुछ तापों पर इस प्रकार है :

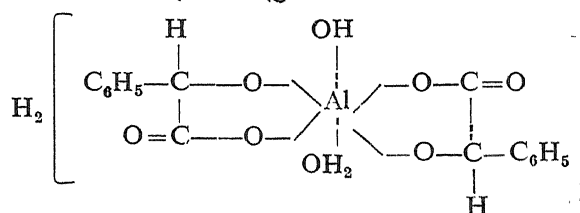
20°C=0·359 ग्राम/100 मि० ली०

30°C=0·475 ग्राम/100 मि० ली०

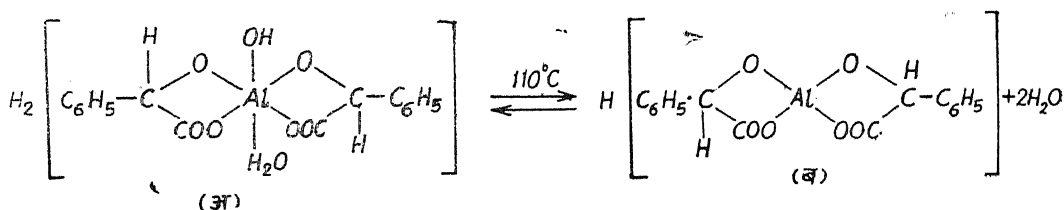
40°C=0·582 ग्राम/130 मि० ली०

विलेयता ताप वक्र एक सीधी रेखा आता है जो यह प्रदर्शित करता है कि इन तापों पर यौगिक की संरचना में कोई अन्तर नहीं है। सही विश्लेषण से यह भी ज्ञात होता है कि यह जटिल यौगिक एक अम्ल है जिसके सम्पूर्ण उदासीनीकरण के लिये क्षार के दो तुल्यांक लग जाते हैं। इस अम्ल को अधिक देर तक 110°C पर गर्म करने से पानी के दो अणु निकलते हैं।

एल्यूमिनो सैलिसिलिक अम्ल के अनुरूप इस सवर्गीय यौगिक अम्ल का नामकरण भी एल्यूमिनो मैन्डेलिक अम्ल किया जा सकता है और तद्नुसार इसकी संरचना भी दी जा सकती है :

$$H_2\left[\begin{array}{c} C_6H_5-CH-O \\ O=C-O \end{array} > Al(OH)(OH_2) < \begin{array}{c} O-C=O \\ O-CH-C_6H_5 \end{array}\right]$$

अब, 110°C पर गर्म करने का प्रभाव निम्नलिखित समीकरण द्वारा समझाया जा सकता है :

$$H_2\left[C_6H_5-CH\begin{array}{c}O\\COO\end{array}Al(OH)(H_2O)\begin{array}{c}O\\OOC\end{array}CH-C_6H_5\right] \underset{}{\overset{110^\circ C}{\rightleftharpoons}} H\left[C_6H_5\cdot CH\begin{array}{c}O\\COO\end{array}Al\begin{array}{c}O\\OOC\end{array}CH-C_6H_5\right]+2H_2O$$

(अ) (ब)

जो ठोस पदार्थ (ब) उक्त लिखित अभिक्रिया से बना उसका विश्लेषण सूत्र $H[Al(C_6H_6O_3)_2]$ से मिलता है। यह पदार्थ (ब) सुगमतापूर्वक दो जल अणु लेकर फिर मूल षटसवर्गीय यौगिक (अ) में बदल जाता है।

वक्र (II) के क्षेत्र ब स से जो अविलेय पदार्थ मिलता है उसे दूसरी विधियों द्वारा भी बनाया जा सकता है जैसे—

(i) $Al(OH)_3$ को अलग से मैन्डेलिक अम्ल के आधिक्य में पाचन करने से एक अविलेय क्रिस्टलीय ठोस बच रहता है, और

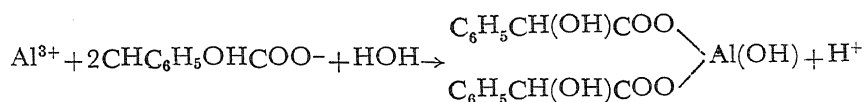
(ii) एल्यूमिनियम के किसी भी लवण के सान्द्र विलयन मैन्डेलिक अम्ल का सान्द्र विलयन डालने से और तनु अमोनियम हाइड्राक्साइड विलयन डालने से pH=3·5 पर एक क्रिस्टलीय सफेद अवक्षेप पृथक् हो जाता है।

विश्लेषण पर यह सिद्ध हुआ कि इस प्रकार प्राप्त किये ठोस पदार्थों का संघटन समाक्षारीय लवण से बहुत मिलता जुलता है।

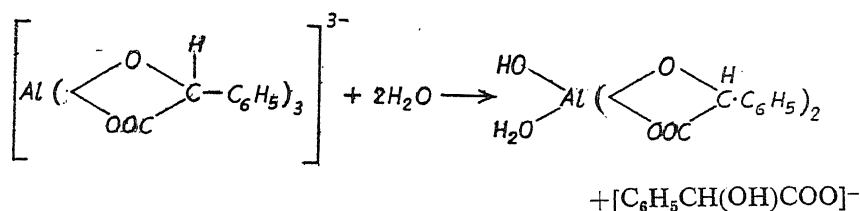
विश्लेषण द्वारा Al=8·01%, मैन्डेलेट=87·31%

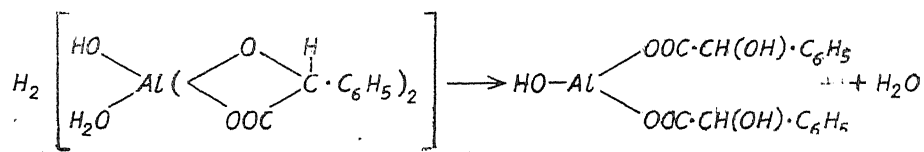
$C_{16}H_{15}O_7Al$ के लिये परिगणित Al=7·87% मैन्डेलेट=87·28%

इस समक्षारीय लवण का बनना निम्नलिखित अभिक्रिया द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है :

$$Al^{3+} + 2CHC_6H_5OHCOO^- + HOH \rightarrow \begin{matrix} C_6H_5CH(OH)COO \\ C_6H_5CH(OH)COO \end{matrix} \Big> Al(OH) + H^+$$

यह समाक्षारीय लवण जल में पूर्णतया अविलेय है, 260° तक द्रवित नहीं होता और 110° पर कई घंटे तक गर्म करने पर भी इसके भार में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

1 : 3 कीलेट को क्रिस्टलीय रूप में प्राप्त करने के समस्त प्रयास विफल ही रहे। जैसा कि श्रीवास्तव एवं मनोहर [5] की धारणा है कि हो सकता है कि यह सवर्गीय यौगिक केवल क्षेत्र ब स में रहता हो किन्तु क्रिस्टलन करने में इसका जल अपघटन निम्न क्रिया द्वारा हो जाता है।

$$\left[Al \left(\begin{matrix} O \\ OOC \end{matrix} \Big> \overset{H}{\underset{|}{C}} - C_6H_5 \right)_3 \right]^{3-} + 2H_2O \longrightarrow \begin{matrix} HO \\ H_2O \end{matrix} \Big> Al \left(\begin{matrix} O \\ OOC \end{matrix} \Big> \overset{H}{C} \cdot C_6H_5 \right)_2 + [C_6H_5CH(OH)COO]^-$$

तत्पश्चात् अधिक समय तक रखने अथवा ओजपूर्वक हिलाने से यह षटवर्गीय कीलेट भी अधिक अविलेय समक्षारीय लवण में परिवर्तित हो जाता है।

$$H_2\left[\begin{matrix}HO \\ H_2O\end{matrix}\!\!>\!Al\left(<\!\begin{matrix}O \\ OOC\end{matrix}\!>\!\overset{H}{\underset{|}{C}}\cdot C_6H_5\right)_2\right] \longrightarrow HO-Al\!<\!\begin{matrix}OOC\cdot CH(OH)\cdot C_6H_5 \\ OOC\cdot CH(OH)\cdot C_6H_5\end{matrix} + H_2O$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं प्रोफेसर तेजनारायण श्रीवास्तव, रसायन विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय का आभारी हूँ जिन्होंने इस कार्य की विवेचना की एवं प्रोत्साहन प्रदान किया।

निर्देश

1. दत्ता, एन० के० तथा बोस, पी० **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०,** 1953, **30**, 431
2. पाविलिनोवा, ए० वी०, **जर्न० जेन० केमि० यू० एस० एस० आर०**, 1947, **17**, 3
3. बरोस, जी० जे० और वार्क, आई० डब्ल्यू०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1928, 222
4. बोबतिलसकी, एन० तथा गोल्डशिमिड, जे० एम० ई०, **बुल० रिसर्च काउन्सिल इजराइल** 1958, **7A**, 12
5. श्रीवास्तव, एस० एन० तथा मनोहर, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1960, **37**, 299
6. मेहरोत्रा, आर० सी०, मेहरोत्रा, आर० के० तथा राय, ए० के०, **जर्न० प्रैक्ट० केमि०**, 1963, **20**, 105
7. श्रीवास्तव, टी० एन० तथा रूपैनवार, डी सी०, **बुलेटिन केमि० सोसा० जापान**, (प्रकाशनाधीन)
8. वही, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1966
9. रूपैनवार, डी० सी०, **पी-एच० डी० थीसिस, लखनऊ विश्वविद्यालय**, 1965
10. जानसन, एच० डब्ल्यू०, **जर्न० साइंस टेक्नालोजी** 1956, **37B**, 522
11. साउचे, पी०, **बुलेटिन सोसा० केमि० फ्रान्स**, 1949, 122
12. भारद्वाज, एस० डी० तथा बकोरे, जी० वी०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1961, **38**, 967
13. पान्डे, सी० एस० तथा मिश्रा, एस० के०, **जर्न० प्रैक्ट० केमि०** 1962, **17**, 5
14. सेन, ए० बी० तथा कपूर, एस० एन०, **जर्न० प्रैक्ट० केमि०**, 1963, **20**, 237
15. वोरजे एफ० तथा लारसन, आर०, **एक्टा केमिका स्कैन्डीनेविया**, 1968, **22**, 1953, 1970

16. रिचार्डसन, ई०, **जर्न० इनार्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1960, **13**, 84

17. क्लार्क, ई० ग्रार०, **जर्न० इनार्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1962, **24**, 82

18. मलिक, डी० के० मौलिक, एस० पी० तथा घोष, वी० एन० **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1963, **40**, 137

19. प्रसाद, एस० तथा नारायणी, पी०, **जर्न० इन्स्टीट्यूट केमि० कलकत्ता**, 1970, **42**, 536

20. वर्मा, एम० आर० तथा पाल, एस० डी०, **जर्न० साइंस इन्डस्ट्रि० रिसर्च**, 1954, **13B**, 347

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages 315-323

लेगेण्ड्र श्रेणी की प्रबल संकलनीयता

के० एन० मिश्रा
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मार्च 1, 1977]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेगेण्ड्र श्रेणी की प्रबल संकलनीयता पर एक प्रमेय की स्थापना की गई है। इस प्रमेय के द्वारा त्रिपाठी के फल का समन्वय एवं विस्तार होता है।

Abstract

On strong summability of Legendre series. *By* K. N. Mishra, Department of Mathematics, B. H. U., Varanasi.

In this paper a theorem on the strong summability of Legendre series has been established. This theorem unifies and extends a result of Tripathi.

1. माना $\sum_{n=v}^{\infty} u_n$ दी हुई अनन्त श्रेणी है जिसका आंशिक योगफल का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। श्रेणी u_n योगफल s तक चेजारों माध्यों से प्रबलतः संकलनीय घातांक 2 वाली या संकलनीय $[c, 2]$ या संकलनीय H_2 कहलाती है यदि

$$\sum_{\nu=0}^{n} \{s_v - s\}^2 = 0(n), \tag{1·1}$$

माना कि $f(x)$ एक फलन है जो परास $[1, 1]$ में समाकलनीय (L) है। इस फलन से लेगेण्ड्र श्रेणी

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \tag{1·2}$$

जहाँ

$$a_n=(n+\tfrac{1}{2})\int_{-1}^{+1} f(x)\,P_n(x)\,dx, \tag{1·3}$$

तथा $P_n(x)$ nवाँ लेगेण्ड्र बहुपद है।

हम निम्नांकित संकेतों का व्यवहार करेंगे :

$$\phi(t)=f\{\cos(\gamma-t)\}-f(\cos\gamma)$$

$$\Phi(t)=\int_0^t |\phi(v)|\,dv,$$

तथा

$$\chi(t)=\phi(t)\surd(\sin(\gamma-t))$$

2. फोग्रा [1] ने लेगेण्ड्र श्रेणी के लिये संकलनीयता का अध्ययन किया है और एक फल प्राप्त किया है जो फूरियर श्रेणी के प्रसंग में हार्डी तथा लिटलवुड [2] के संगत है। त्रिपाठी [6] ने भिन्न प्रकार से लेगेण्ड्र श्रेणी की प्रबल संकलनीयता के लिये एक नवीन फल प्राप्त किया है। उन्होंने सिद्ध किया है कि

प्रमेय A:

यदि किसी $\alpha>\frac{1}{2}$ के लिये

$$\int_0^t |\,f(x\pm u)-f(x)\,|du=0\left[\frac{t}{\{\log 1/t\}^{\alpha}}\right]$$

ज्यों ज्यों $t\to 0$, तो

$$\sum_{\nu=0}^{n}\{S_v(x)-f(x)^2=o(n),\ (-1+\epsilon\leqslant x\leqslant 1+\epsilon),\ \epsilon>0$$

जहाँ $S_n(x)$ लेगेण्ड्र श्रेणी का nवाँ आंशिक योगफल व्यक्त करता है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उपर्युक्त प्रमेय का निम्नांकित प्रमेय के रूप में सार्वीकरण करना है।

प्रमेय :

यदि किसी $k\geqslant 1$ के लिये

$$\int_0^t |f(x\pm u)-f(x)|du=o[t\lambda^k(t)],\ (t\to 0) \tag{2·2}$$

$$\int_0^t |\,f(x\pm u)-f(x)|\,du=O\left[t\,\lambda_{(t)}^{k}\right],\ (t\to 0) \tag{2·3}$$

जहाँ $\lambda^k_{(t)}$ t का ऐसा धन फलन है कि

(i) $\lambda^k(t) \to 0$ जैसे जैसे $t \to 0$;

(ii) $\lambda^k(t)$ (n^{-1}, n) समस्वनिक है

iii)) $\int_{n-1}^{n} \frac{\lambda^{2k}(t)}{t} dt = O(1)$

तो $$\sum_{\nu=0}^{n} \{S_\nu(x) - f(x)\}^2 = O(n), \ (-1+\epsilon \leqslant x \leqslant 1+\epsilon), \ \epsilon > 0,$$

3. हमें अपने प्रमेय के लिये निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी :

प्रमेयिका 1[4]

$$\sum_{\nu=0}^{n} (2\nu+1) P_\nu(x) \ P_\nu(y) = (n+1) \frac{[P_{n+1}(y) P_n(x) - P_n(y) P_{n+1}(x)]}{(y-x)} \quad (3\cdot1)$$

प्रमेयिका 2[4]

$$P_n(\cos \gamma) = \sqrt{\left[\frac{2}{n\pi \sin \lambda}\right.} \cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\gamma - \frac{\pi}{4}\right] + O(n^{-3/2}). \quad (3\cdot2)$$

प्रमेयिका 3[5]

प्रमेय के प्रतिबन्ध के अन्तर्गत

$$\Phi(t) = \int_0^t |f\{\cos(\gamma - \nu)\} - f(\cos \gamma)| d\nu = O[t\lambda^k(t)], \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0,$$

जहाँ $x = \cos \gamma$, $x + u = \cos \gamma'$ तथा $\gamma - \gamma' = \nu$.

प्रमेयिका की उपपत्ति फोआ [1] के अनुसार होगी ।

प्रमेयिका 4[6]

यदि $$\int_0^t |\phi(u)| du = o(t), \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0$$

तो $$\int_{n-1}^{\eta} \frac{|\phi(t)|}{t^2} dt \int_{n-1}^{t} \frac{|\phi(u)| \, du}{u} = O(n),$$

तथा $$\int_{n-1}^{\eta} \frac{|\phi(t)|}{t^2} dt \int_{n-1}^{t} \frac{|\phi(u)|}{u} du = O(n).$$

4 प्रमेय की उपपत्ति

श्रेणी (1·2) का nवाँ आंशिक योग, प्रमेयिका 1 के अनुसार,

$$S_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu} a_k P_k(x),$$

$$=\frac{(\nu+1)}{2}\int_{-1}^{+1} f(x')\frac{[P_\nu(x)P_{\nu+1}(x')-P_{\nu+1}(x)P_\nu(x')]}{(x'-x)}\,dx$$

$f(x')=1$ रखने पर यह देखा जाता है कि

$$1=\frac{(\nu+1)}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{[P_\nu(x)P_{\nu+1}(x')-P_{\nu+1}(x)P_\nu(x')]}{x'-x}\,dx$$

अत: $$S_\nu(x)-f(x)=\frac{\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1}[f(x')-f(x)]\frac{[P_\nu(x)P_{\nu+1}(x')-P_{\nu+1}(x)P_\nu(x')]}{x'-x}\,dx$$

हम एक धन संख्या s लेते हैं जो इकाई से कम है। इसे दो धन संख्याओं μ तथा ξ के योग के तुल्य मानते हैं कि $\mu+\xi=s$.

माना कि d एक अन्य धन संख्या है जिससे कि $0<d<\mu$ तथा μx तथा $\mu x'(-1, 1)$ के मध्य x के दो संतत फलन हैं जो $d\leqslant\mu x\leqslant\mu$, $d\leqslant\mu x'\leqslant\mu$ सीमाओं के अन्तर्गत स्थित हैं। तब $-1+s\leqslant1-s$ के लिये

$$S_\nu(x)-f(x)=A_\nu(x)+B_\nu(x)+C_\nu(x) \text{ के साथ ही}$$

$$A_\nu(x)=\frac{\nu+1}{2}\int_{-1}^{x-\mu x}\phi(x, x')\,g_\nu(x, x')dx',$$

$$B_\nu(x)=\frac{\nu+1}{2}\int_{x-\mu x}^{x+\mu x'}\phi(x, x')\,g_\nu(x, x')dx',$$

$$C_\nu(x)=\frac{\nu+1}{2}\int_{x\mu+x'}^{+1}\phi(x, x')\,g_\nu(x, x')dx',$$

$$\phi(x, x')=f(x')-f(x).$$

तथा $$g_\nu(x,x')=\frac{P_\nu(x)P_{\nu+1}(x')-P_{\nu+1}(x')P_\nu(x')}{x-x'}$$

हाब्सन [3] ने दिखलाया है कि $-1+s\leqslant x\leqslant1-s$ के लिये समान रूप से

$$\lim_{\nu\to\infty}A_\nu(x)+\lim_{\nu\to\infty}C_\nu(x)=0$$

अब हम कल्पना करते हैं कि

$$x=\cos\gamma,\ x'=\cos\gamma',\ 0<\gamma<\pi,$$

$$0<\gamma'<\pi,\ 1-\xi=\cos\rho,\ 1-(\mu+\xi)=1-s=\cos(\rho+\tau)$$

$$0<\rho<\pi/2,\ 0<\tau,\ \rho+\tau<\pi/2.$$

तो यदि η

$$[\text{arc}\cos u-\text{arc}\cos(u+\mu)]\ (-1,\ 1-\mu),$$ में u के लिये

के न्यूनतम को व्यक्त करें तो सैनसोन [4] के अनुसरण करने पर

$$S_\nu(x)-f(x)=B_\nu(\cos\gamma)$$

$$=\frac{\nu+1}{2}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\phi(\gamma,\gamma')\ g_\nu(\gamma,\gamma')\sin\gamma'\ d\gamma'$$

जिसमें

$$\phi(\gamma,\gamma')=f(\cos\gamma')-f(\cos\gamma)$$

$$g_\nu(\gamma,\gamma')=\frac{[P_\nu(\cos\gamma)\ P_{\nu+1}(\cos\gamma')-P_{\nu+1}(\cos\gamma)\ P_\nu(\cos\gamma')]}{\cos\gamma'-\cos\gamma}$$

$$\rho+\tau\leqslant\gamma\leqslant\pi-(\rho+\tau),\ 0<\eta\leqslant\tau$$

प्रमेयिका 2 के उपयोग करने तथा जीगो [5] का अनुसरण करने पर $a=\beta=0$ के लिये, कुछ सरलीकरण के उपरान्त

$$S_\nu(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(\sin\gamma)}}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\phi(\gamma,\gamma')\sqrt{(\sin\gamma')}\frac{[\sin\{\nu+1)(\gamma-\gamma')\}}{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}$$

$$-\frac{\cos\{\nu+1)(\gamma+\gamma')\}}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)d\gamma'$$

अब $$\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{\phi(\gamma,\gamma')\sqrt{(\sin(\gamma'))}}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\gamma')}(\cos\{(\nu+1)(\gamma+\gamma')\}d\gamma'=0(1)$$

अतः $\gamma-\gamma'=t$ रखने पर तथा $1/\pi\sqrt{(\sin\gamma)}$ को H द्वारा व्यक्त करने पर

$$S_\nu(x)-f(x)=H\int_0^\eta\frac{\phi(t)\sin(\nu+1)t\sqrt{(\sin(\gamma-t))}}{\sin\frac{1}{2}t}\ dt$$

चूंकि $$\left|\int_0^{n^{-1}}\frac{\phi(t)\sin(\nu+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}\sqrt{(\sin(\gamma-t)dt}\right|$$

$$\leqslant\int_0^{n^{-1}}2(\nu+1)|\phi(t)|dt$$

$$=O\left(\frac{\nu}{n}\right)$$

$$=O(1)$$

चूँकि $\Phi(t)=0[t\lambda^k(t)]\Rightarrow\Phi(t)=0(t)$ तथा प्रमेयिका 3 के सम्प्रयोग से

अत: $$S_\nu(x)-f(x)=H\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\phi(t)\sin(\nu+1)t\sqrt{(\sin(\gamma-t))}}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt+O(1).$$

$$=2H\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\phi(t)}{t}\sin(\nu+1)t\sqrt{((\sin\gamma-t))}\,dt+O(1)$$

$$=2H\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\sin(\nu+1)t\,dt-O(1)$$

जहाँ $\psi(t)=\sqrt{(\sin(\gamma-t))}\,\phi(t)$ अत: $(|\psi(t)|\leqslant|\phi(t)|)$

अत: $$\sum_{\nu=1}^{n}\{S_\nu(x)-f(x)\}^2$$

$$=4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)\,\psi(u)}{t\cdot u}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\sin(\nu+1)t\sin(\nu+1)u\right\}dt\,du+O(n)$$

$$=2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\frac{\psi(u)}{t}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}[\cos(\nu+1)(u+t)\right\}-\{\cos(\nu+1)(u-t)\}]dt\,du$$
$$+O(n)$$

$$=2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\frac{\phi(u)}{u}\left[\frac{\sin(n+\frac{3}{2})(u+t)}{2\sin\frac{1}{2}(u+t)}-\cos(u+t)\right]dt\,du$$

$$-2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\frac{\psi(u)}{u}\left[\frac{\sin(n+\frac{3}{2})(u-t)}{2\sin\frac{1}{2}(u-t)}-\cos(u-t)\right]dt\,du$$
$$+O(n)$$

$$=2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\phi(t)}{t}dt\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(u)}{t}\frac{\sin\{(n+1)(u+t)\}}{(u+t)}du$$

$$-2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}dt\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(u)}{u}\frac{\sin\{(n+1)(u-t)\}}{(u-t)}du+O(n)$$

$$=J_1-J_2+O(n) \tag{4·1}$$

अब $$J_2=2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\,dt\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(u)}{u}\,\frac{\sin\{(n+1)\,(u-t)\}}{(u-t)}\,du$$

$$=2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\,dt\left[\int_{n^{-1}}^{\eta t}+\int_{t}^{\eta}\right]\frac{\psi(u)}{u}\,\frac{\sin\{(n+1)\,(u-t)\}}{(u-t)}\,du$$

$$=2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{\psi(u)}{u}\,\frac{\sin\{(n+1)\,(u-t)\}}{(u-t)}\,du$$

$$+2H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(u)}{u}\,du\int_{n^{-1}}^{u}\frac{\sin\{(n+1)\,(u-t)\}}{(u-t)}\,dt$$

$$=4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{\psi(u)}{t}\,\frac{\sin\{(n+1)\,(u-t)\}}{(u-t)}\,du$$

$$=4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{\psi(u)}{u}\left[\frac{1}{u-t}-\frac{1}{u}\right]\frac{\sin\{(n+1)\,(u-t)\}}{(u-t)}\,du$$

$$=4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{\psi(u)}{(u-t)}\,\sin\{(n+1)\,(u-t)\}\,du$$

$$+O\left\{\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{|\phi(t)|}{t^2}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{|\phi(u)|}{u}\,du\right\}$$

$$=4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}x(u)\,\frac{\sin\{(n+1)\,(u-t)\}}{(u-t)}\,du+O(n)$$ प्रमेयिका 4 के उत्तरार्द्ध से

प्रमेयिका 3 के द्वारा तथा प्रमेय की परिकल्पना से

$$\int_{n^{-1}}^{t}\psi(u)\,\frac{\sin\{(n+1)\,(u-t)\}}{(u-t)}\,du=O\left[n\int_{0}^{t}|\phi(u)|du\right]$$

$$=O[nt\,\lambda^k(t)]$$

अतः $$J_2=O\left[n\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{|\phi(t)|}{t}\,\lambda^k(t)\right]+O(n)$$

$$=O(n)\left[\Phi(t)\frac{\lambda^k(t)}{t}\right]_{n^{-1}}^{n}+O(n)\left[\int_{n^{-1}}^{\eta}\Phi(t)\left\{\frac{tk\,\lambda^{k-1}(t)-\lambda^k(t)}{t^2}\right\}dt\right]$$

$$=O(n)\left[\frac{t\,\lambda^k(t)\,\lambda^k(t)}{t}\right]_{n^{-1}}^{\eta}+O(n)\left[\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{k\,\Phi(t)\,\lambda^{k-1}(t)}{t}\,dt\right]$$

$$+O(n)\left[\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\Phi(t)\,\lambda^k(t)}{t^2}\,dt\right]$$

$$=O(n)\Big[\lambda^{2k}(t)\Big]_{n^{-1}}^{\eta}+o(n)\Big[\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{kt\,\lambda^{k}(t)\,\lambda^{k-1}(t)}{t}\,dt\Big]$$

$$+O(n)\Big[\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{t\,\lambda^{k}(t)\,\lambda^{k}(t)}{t^2}\,dt\Big]$$

$$=O(n)\Big[\lambda^{2k}(t)\Big]_{n^{-1}}^{\eta}+o(n)\Big[\int_{n^{-1}}^{n}\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}(\lambda^{2k}(t))\,dt\Big]$$

$$+O(n)\Big[\int_{n^{-1}}^{\eta}\{\lambda^{k}(t)\}^2/t\,dt\Big]$$

$$=O(n) \tag{4·2}$$

प्रमेय की परिकल्पना (iii) तथा (ii) से क्योंकि $\lambda k(t)$ समस्वनिक है अतः इसका ।अवकल गुणांक स्थिर चिन्ह वाला है ।

इसी प्रकार $J_1=4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{\psi(u)}{t}\Big[\frac{1}{u}-\frac{1}{u+t}\Big]\sin\{(n+1)(u+t)\}du$

$$=4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{\psi(u)}{u}\sin\{(n+1)(u+t)\}du$$

$$-4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{\psi(u)}{(u+t)}\sin\{(n+1)(u+t)\}du$$

अतः $|J_1|\leqslant 4H_2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{|\phi(t)|}{t^2}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{|\phi(u)|}{u}\,du+4H^2\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{|\phi(t)|}{t^2}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{|\phi(u)|}{u}\,du$

अतः $J_1=O\Big\{\int_{n^{-1}}^{\eta}\frac{|\phi(t)|}{t^2}\,dt\int_{n^{-1}}^{t}\frac{|\phi(u)|}{u}\,du\Big\}$

$=O(n)$ प्रमेयिका 4 के उत्तरार्द्ध के आधार पर (4·3)

अब (4·1), (4·2) तथा (4·3) से वांच्छित फल प्राप्त होता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० एल० एम० त्रिपाठी का कृतज्ञ है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाई ।

निर्देश

1, फोआ, ए०, Boll Un. Math. Ital 1943, (**2**), (**5**), 18-27

2. हार्डी, जी० एच० तथा लिटलवुड, जे० ई०, Comptes Rendus de l' Academie de Sciences de Paris, 1913, **156**, 1307-1309.

3. हाब्सन, ई० डब्ल०, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, **कैम्ब्रिज, 1913.**

4. सैसोन, जी०, Orthogonal Functions, 1959

5. जीगो, जी० Orthogonal Polynomials, **अमेरिकन मैथ० सोसा० कलोकियम प्रकाशन,** 1939

6. त्रिपाठी, एन० एम०, **डी० फिल० थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय,** 1966

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 20, No. 4, October, 1977, Pages 325-329

माइक्सनर के सूत्र के सम्बन्ध में

बी० एम० सिंघल
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—सितम्बर 5, 1976]

सारांश

मिल्ने-थामसन द्वारा परिभाषित नारलुंड अन्तर अपरेटरों की सहायता से एक सार्व तत्समिका की स्थापना की गई है।

Abstract

On Meixner's formula. *By* B. M. Singhal, Department of Mathematics, Government Science College, Gwalior.

In the present note, we have established a general identity; viz.

$$(-1)^{-\rho-\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} z^n \triangle_a^{-n-\rho} \triangle_\beta^{-n-\sigma} f(a)g(\beta)$$

$$=(1-z)^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_r}{r!} \frac{z^r}{(1-z)^{2r}} \sum_{m,n,i,j=0}^{\infty} \frac{(\lambda+r)_m(\lambda+r)_n}{m!\,n!}$$

$$\cdot \frac{(\rho-\lambda)_i(\sigma-\lambda)_j}{i!\,j!} \frac{1}{(1-z)^{m+n}} f(a+m+i+r)g(\beta+n+j+r),$$

provided that the series involved converge absolutely and where $\triangle$ denotes the Norlund difference operator.

This identity, in particular, reduces to the Meixner's formula.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda]_n}{n!} {}_2F_1\left[\begin{matrix} n+\rho, a; x \\ b \end{matrix}\right] {}_2F_1\left[\begin{matrix} n+\sigma, c; y \\ d \end{matrix}\right] z^n$$

$$=(1-z)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n(a)_n(c)_n}{n!\,(b)_n(d)_n} {}_2F_1\left[\begin{matrix} \lambda+n, a+n; & \frac{x}{1-z} \\ b+n & \end{matrix}\right]$$

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} \lambda+n, c+n; & \frac{y}{1-z} \\ d+n & \end{matrix}\right]\left[\frac{nyz}{(1-z)^2}\right]^n, \ |z|<1.$$

In last, we have discussed one more identity, of similar nature, which, in particular, reduces to another interesting result.

1. प्रस्तावना

माइकमनर[2] (देखें [1, p. 84] भी) ने निम्नांकित सूत्र को सिद्ध किया है

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda]_n}{n\,!}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} n+\rho, a; x \\ b \end{matrix}\right] {}_2F_1\left[\begin{matrix} n+\sigma, c; y \\ d \end{matrix}\right] z^n$$

$$=(1-z)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (a)_n (c)_n}{n\,!\,(b)_n (d)_n}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} \lambda+n, a+n; \frac{x}{1-z} \\ b+n \end{matrix}\right]$$

$$\cdot\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} \lambda+n, c+n; \frac{y}{1-z} \\ d+n \end{matrix}\right] \left[\frac{xyz}{(1-z)^2}\right]^n, \ |z|<1,$$

जहाँ ${}_2F_1$ गासीय हाइपरज्यामितीय फलन है ।

प्रस्तुत टिप्पणी में मिल्ने-थामसन[3] द्वारा परिभाषित नारलुंड अन्तर आपरेटरों $\triangle$ तथा E की सहायता से सार्व तत्समिका

$$E_\alpha f(\alpha)=f(\alpha+1)$$

$$\triangle_\alpha f(\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha)$$

की स्थापना की गई है जिससे $\triangle_\alpha=E_\alpha-1$

तथा
$$\triangle_\alpha^n f(\alpha)=\triangle_\alpha^{n-1}[\triangle_\alpha f(\alpha)]$$

हमारी तत्समिका विशेष रूप से (1) में समानीत हो जाती है

2. निम्नांकित तत्समिका स्थापित की जाती है ।

$$(-1)^{-\rho-\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} z^n \triangle_\alpha^{-n-\rho} \triangle_\beta^{-n-\sigma} f(\alpha) g(\beta)$$

$$=(1-z)^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_r}{r\,!} \frac{z^r}{(1-z)^{2r}} \sum_{m,n,i,j=0}^{\infty} \frac{(\lambda+r)_m (\lambda+r)_n}{m\,!\,n\,!}$$

$$\cdot\, \frac{(\rho-\lambda)_i (\sigma-\lambda)_j}{i\,!\,j\,!} \frac{1}{(1-z)^{m+n}} f(\alpha+m+i+r) g(\beta+n+j+r), \tag{2}$$

बशर्ते कि सन्निहित श्रेणी परम अभिसारी हो तथा $F(\alpha)$ और $g(\beta)$ संमिश्र संख्याओं के काल्पनिक अनुक्रम हैं ।

उपपत्ति :

$$\text{वामपक्ष} =(-1)^{-\rho-\sigma}\triangle_\alpha^{-\rho}\triangle_\beta^{-\sigma}\left(1-\frac{z}{\triangle\alpha\triangle\beta}\right)^{-\lambda} f(\alpha)g(\beta)$$

$$=(-1)^{-\rho-\sigma}\triangle_\alpha^{\lambda-\rho}\triangle_\beta^{\lambda-\sigma}(1-z+E_\alpha E_\beta-E_\alpha-E_\beta)^{-\lambda} f(\alpha)g(\beta)$$

$$=(-1)^{-\rho-\sigma}\triangle_\alpha^{\lambda-\rho}\triangle_\beta^{\lambda-\sigma}(1-z)^{-\lambda}\left(1+\frac{E_\alpha E_\beta}{(1-z)}-\frac{E_\alpha}{(1-z)}-\frac{E_\beta}{(1-z)}\right)^{-\lambda} f(\alpha)g(\beta)$$

$$=(-1)^{-\rho-\sigma}\triangle_\alpha^{\lambda-\rho}\triangle_\beta^{\lambda-\sigma}(1-z)^{-\lambda}\left\{1-\frac{E_\alpha E_\beta z}{(1-z)^2\left(1-\frac{E_\alpha}{1-z}\right)\left(1-\frac{E_\beta}{1-z}\right)}\right\}^{-\lambda}$$

$$\cdot\left(1-\frac{E_\alpha}{1-z}\right)^{-\lambda}\left(1-\frac{E_\beta}{1-z}\right)^{-\lambda} f(\alpha)g(\beta)$$

$$=(-1)^{-\rho-\sigma}\triangle_\alpha^{\lambda-\rho}\triangle_\beta^{\lambda-\sigma}(1-z)^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_r}{r!}\frac{E_\alpha^r E_\beta^r z^r}{(1-z)^{2r}}$$

$$\cdot\left(1-\frac{E_\alpha}{1-z}\right)^{-\lambda-r}\left(1-\frac{E_\beta}{1-z}\right)^{-\lambda-r} f(\alpha)g(\beta)$$

$$=(-1)^{-\rho-\sigma}\triangle_\alpha^{\lambda-\rho}\triangle_\beta^{\lambda-\sigma}(1-z)^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_r}{r!}\frac{z^r}{(1-z)^{2r}}$$

$$\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+r)_m(\lambda+r)_n}{m!\,n!}\frac{1}{(1-z)^{m+n}}E_\alpha^{m+r}E_\beta^{n+r}f(\alpha)g(\beta)$$

$$=(1-z)^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_r}{r!}\frac{z^r}{(1-z)^{2r}}\sum_{m,n,i,j,=0}^{\infty}\frac{(\lambda+r)_m(\lambda+r)_n}{m!\,n!}$$

$$\cdot\frac{(\rho-\lambda)_i(\sigma-\lambda)_j}{i!\,j}\frac{1}{(1-z)^{m+n}}f(\alpha+m+i+r)g(\beta+n+j+r)$$

इससे (2) की उपपत्ति पूरी हुई।

उदाहरण :

$$f(\alpha)=\frac{\Gamma[(a+\alpha)]}{\Gamma[(b+\alpha)]}x^\alpha \text{ तथा } g(\beta)=\frac{\Gamma[(c+\beta)]}{\Gamma[(d+\beta)]}y^\beta,$$

का चयन करते हुये जहाँ (a) द्वारा A प्राचलों $a_1, \ldots, a_A$, के अनुक्रम का बोध होता है। (b), (c) तथा (d) के लिये इसी प्रकार के निगमन से। तब $\alpha=\beta=0$, के लिये

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda]_n}{n\,!}\ {}_{A+1}F_B\left[\begin{matrix} n+\rho,\ (a);\ x \\ (b) \end{matrix}\right]\ {}_{C+1}F_D\left[\begin{matrix} n+\sigma,\ (c);\ y \\ (d) \end{matrix}\right] z^n$$

$$=(1-z)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda]_n[(a)]_n[(c)]_n}{n\,!\,[(b)]_n[(d)]_n}\ F\left[\begin{matrix} (a+n):\ \rho-\lambda;\ \lambda+n: \\ (b+n):\ —;\ —; \end{matrix}\ x,\ \frac{x}{1-z}\right]$$

$$.\,F\left[\begin{matrix} (c+n):\ \sigma-\lambda;\ \lambda+n; \\ (d+n):\ ——;\ ——; \end{matrix}\ y,\ \frac{y}{1-z}\right]\left[\frac{xyz}{(1-z)^2}\right]^n,\ |\,z\,|<1, \qquad (4)$$

जब $\rho=\sigma=\lambda$ तथा $A=B=C=D=1$ तो (4) माइक्सनर के सूत्र[1] में समानीत हो जाता है।

3. इस अनुभाग में एक अन्य ऐसी ही तत्समिका दी जा रही है जिससे समान विधि का अनुसरण करते हुये किया जा सकता है अर्थात्

$$(-1)^{-\rho-\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n\,!} z^n\ \triangle_a^{n-\rho}\ \triangle_\beta^{-n-\sigma}\ \rho(a)g(\beta)$$

$$=(1-z)^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_r}{r\,!} \frac{z^r}{(1-z)^{2r}} \sum_{m,n,i,j,=0}^{\infty} \frac{(\lambda+r)_m(\lambda+r)_n}{m\,!\,n\,!}$$

$$.\,\frac{(\rho)_i(\sigma-\lambda)_j}{i\,!\,j\,!} \frac{z^m}{(1-z)^{m+n}} f(a+m+i+r)g(\beta+n+j+r), \qquad (5)$$

बशर्ते कि सन्निहित श्रेणी परम अभिसारी हो।

उदाहरण:

(3) की भाँति $f(a)$ तथा $g(\beta)$ लेने पर (क्योंकि $a=\beta=0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda]_n}{n\,!}\ {}_{A+1}F_B\left[\begin{matrix} \rho-n,\ (a);\ x \\ (b) \end{matrix}\right] {}_{C+1}F_D\left[\begin{matrix} \sigma+n,\ (c);\ y \\ (d) \end{matrix}\right] z^n$$

$$=(1-z)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda]_n[(a)]_n[(c)]_n}{n\,!\,[(b)]_n[(d)]_n}\ F\left[\begin{matrix} (a+n):\ \rho;\ \lambda+n; \\ (b+n);\ —;\ —; \end{matrix}\ x, \frac{xz}{1-z}\right]$$

$$.\,F\left[\begin{matrix} (c+n):\ \sigma-\lambda;\ \lambda+n; \\ (d+n):\ —;\ —; \end{matrix}\ y, \frac{y}{1-z}\right]\left[\frac{xyz}{(1-z)^2}\right]^n,\ |\,z\,|<1 \qquad (6)$$

जो नवीन परिणाम लगता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वी० एम० अग्रवाल का आभारी है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी की अवधि में मार्ग दर्शन किया।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953

2. माइक्सनर, जे०, Deutche Math., 1941, 6, 341-349.

3. मिल्ने-थामसन, एल० एम०, The Calculus of Finite Differences, लन्दन, 1933.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages 331-335

सार्वीकृत बहुपद $\bar{R}_n(x, y)$ के लिये परिमित अन्तर सूत्र

आर० बी० सिंह तथा आर० एन० पाण्डेय
सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीचयूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—दिसम्बर 14, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य सार्वीकृत बहुपद $\bar{R}_n(x, y)$ के लिये परिमित अन्तर सूत्र व्युत्पन्न करना है।

Abstract

Finite difference formula for the generalized polynomial $\bar{R}_n(x, y)$. *By* R. B. Singh and R. N. Pandey, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The object of present paper is to derive finite difference formula for the generalized polynomial $\bar{R}_n(x, y)$. The generalized polynomial $\bar{R}_n(x, y)$ happens to be a generalization of as many as twenty two orthogonal and non-orthogonal polynomials such as Hermite, Laguerre, Legundre, Jacobi etc.

1. प्रस्तावना

हाल ही में हमने जनक फलन $\bar{R}_n(x, y)$

$$\bar{R}_{n;\, \beta;\, v;\, a_1;\, v_1;\, (b_{q+1},\, B_{q+1});\, r_1;\, l_1}^{m;\, m_1;\, m_2;\, m_3;\, m_4;\, \alpha;\, \mu;\, (a_p,\, A_p);\, l_2} (x, y) t^n$$

$$= \frac{QJU_1 (a_1 x^{m_1} y^{m_2} t^{m_3})}{(1 - v x^{-m_t} m_4)^{\alpha}} \left[H_{p,\, q+1}^{l_1,\, l_2} \left[\frac{-\mu y^r \, lt}{(1 - v x^{-m_t} m_4)^{\beta}} \middle| \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \ldots (a_p, A_p) \\ (b_1, 1), (b_2, B_2), \ldots, (b_{\gamma+1}, B_{\gamma+1}) \end{matrix} \right] \right. \quad (1 \cdot 1)$$

की सहायता से एक नवीन सार्वीकृत बहुपद $\bar{R}_n(x, y)$ परिभाषित किया है। (1·1) के दाहिने पक्ष में फाक्स[2] द्वारा परिभाषित H-फलन आया है। (1·1) के वाम पक्ष को हम संक्षेपण की दृष्टि से $\bar{R}_n(x, y)$ द्वारा व्यक्त करेंगे। यही नहीं, सार्वीकृत बहुपद $\bar{R}_n(x, y)$ को हम

$\bar{R}^{0}_{n}(x, y)$, द्वारा प्रदर्शित करेंगे, यदि

$$a_1=0=U_1 \tag{1·1}$$

संक्षेपण की दृष्टि से समग्र शोध प्रपत्र में निम्नांकित संकेत प्रयुक्त किये गाये हैं (1·2)

(i) $(a_p)=a_1, a_2, \ldots, a_p$

(ii) $[(a_p)]_n=\prod_{i=1}^{p}(a_i)_n=(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n$

(iii) $[(M_1(i, j))]_n=\prod_{j=1}^{l_2}\prod_{i=1}^{A_j}\left(\frac{i-a_j+A_jb_1}{A_j}\right)_n$

(iv) $[1-(M_2(i, j))]_n=\prod_{j=l_2+1}^{p}\prod_{i=1}^{A_j}\left(1-\frac{a_j-A_jb_1+i-1}{A_j}\right)_n$

(v) $[(N_1(i, j))]_n=\prod_{j=l_1+1}^{q+1}\prod_{i=1}^{B_j}\left(\frac{i-b_j+B_jb_1}{B_j}\right)_n$

(vi) $[1-N_2(i, j))]_n=\prod_{j=2}^{l_1}\prod_{i=1}^{B_j}\left(1-\frac{b_j-B_jb_1+i-1}{B_j}\right)_n$

(vii) $$E=\frac{(-1)\sum_{j=1}^{l_j}\prod_{j=1}^{p}A_j^{A_j}}{(-1)\sum_{j=l_2+1}^{p}\prod_{j=2}^{q+1}B_j^{B_j}}$$

(viii) $W=\sum_{j=2}^{q+1}B_j-\sum_{j=1}^{p}A_j+1$

(ix) $\triangle_k[m; (a_p)]=\prod_{i=1}^{p}\prod_{\gamma=1}^{m}\left(\frac{a_i+r-1}{m}\right)_k$

(x) $\Gamma\left[a+\frac{(m)}{m}\right]=\prod_{\gamma=1}^{m}\Gamma\left(a+\frac{r}{m}\right)$

(1·1) को निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$\overline{R}_n(x, y)=\sum_{k=0}^{[n/m4]}\sum_{s=0}^{[n/2m5]}\frac{[(M_1(i, j))]_{n-m_4k-2m_3s}\,[1-(M_2(i, j))]_{n-m_4k-2m_3s}}{k!\,(n-m_4k-2m_3s)!\,s!\,(v_1+1)_s}$$

$$\times\frac{v^k(\mu E)^{n-m_4k-2m_3s}\,y^{r_1-(n-m_4k-2m_3s)+2m_2s}\,(-1)^s(\tfrac{1}{2}a_1)^{2s}\,x^{2m_1s-mk}}{[(N_1(i, j))]_{n-m_4k-2m_3s}\,[1-(N_2(i, j))]_{n-m_4k-2m_3s}}$$

$$\times\frac{(a+\beta b_1)_{n\beta-m_4\beta k-2m_3s+k}}{(a+\beta b_1)_{n\beta-m_4\beta k-m_3\beta s}} \qquad (1\cdot3)$$

जहाँ संकेतन $[(M_1(i, j))]$, $[1-(M_2(i, j))]$, $[(N_1(i, j))]$ $[1-(N_2(i, j))]$, E तथा W का वही प्रयोजन है जो संकेतन सूची में दिया जा चुका है।

$m_4\beta$ तथा $2m_3\beta$ प्राचलों के विशिष्टीकरण से आठ हाइपरज्यामितीय रूप उत्पन्न होते हैं।

(1·2) के सम्प्रयोग से (1·3) को $F_0(m_4\beta=1)$ के रूप में लिख सकते हैं

$$\overline{R}^{\,0}_{m_4n}(x, y)=\frac{(2\pi)^{(m_4-1)/2}\,(\mu Ey^{r_1})^{m_4n}m_4^{-(m_4n+1/2)}}{\Gamma(1-a-\beta b_1-n)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{[(M_1(i, j))]_{(n-k)m_4}\,[1-(M_2(i, j))]_{(n-k)m_4}\,v^k(-1)^k m_4^{m_4k}}{k!\,[(N_1(i, j))]_{(n-k)m_4}\,[1-(N_2(i, j))]_{(n-k)m_4}\,(\mu Ey^{r_1})^{m_4k}\,x^{mk}}$$

$$\times\frac{\Gamma(1-a-\beta b_1-n+k)}{\Gamma\left[n-\frac{(m_4)}{m_4}-k\right]} \qquad (1\cdot4)$$

n के लिये $(n-a)$ लिखने पर

$$\overline{R}^{\,0}_{(n-a)m_4}(x, y)=\frac{(\mu Ey^{r_1})^{m_4n}\,(2\pi)^{(m_4-1)/2}\,m_4^{-(m_4n+1/2)}\,x^{ma}}{(n-a)!\,v^a\,(-1)^a\,\Gamma(1-a-\beta b_1-n+a)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-a}\frac{[(M_1(i, j))]_{(n-a-k)m_4}\,[1-(M_2(i, j))]_{n(n-a-k)m_4}\,m_4^{m_4(a+k)}\,v^{a+k}}{k!\,[(N_1(i, j))]_{(n-a-k)m_4}\,[1-(N_2(i, j))]_{(n-a-k)m_4}\,(n-a-k)!}$$

$$\times\frac{(-1)^{(a+k)}(n-a)!\,(-1)^{n-a-k}(-1)^{n+a+k}\,\Gamma(1-a-\beta b_1-n+a+k)}{(\mu Ev^{r_1})^{m_4(a+k)}\,x^{m(a+k)}\,\Gamma\left[n-a-k+\frac{(m_4-1)}{m_4}\right]} \qquad (1\cdot5)$$

श्रेणी को अंकित करने के लिये सांकेतिक आपरेटर $\overset{n}{\triangle}_a f(a)$ का प्रयोग करने पर

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,{}^{n}C_{k}\,f(a+k)$$

उपर्युक्त सम्बन्ध को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\overline{R}^{0}_{(n-a)m_4}(x, y)=\frac{(\mu E v^{r_1})^{m_4 n} x^{ma}(2\pi)^{(m_4-1)/2} m_4^{-(m_4 n+1/2)}}{(n-a)!\, v^a(-1)^a \Gamma(1-\alpha-\beta b_1-n+a)}$$

$$\times \triangle_a^{n-a}\left[\frac{[(M_1(i, j))]_{(n-a)m_4}\,[1-(M_2(i, 1))]_{(n-a)m_4}\, m_4^{m_4 a}(-1)^{n+a}}{[(N_1(i, j))]_{(n-a)m_4}\,[1-(N_2(i, j))]_{(n-a)m_4}\,(\mu E v^r 1)^{m_4 a}} \times \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta b_1-n+a)(-v)^a}{\Gamma\left[n+\frac{(m_4-1)}{m_4}-a\right] x^{ma}}\right] \tag{1·6}$$

विशिष्ट दशायें

विभिन्न प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें (1·6) की विशिष्ट दशाओं के रूप में निम्नांकित परिणाम प्राप्त होते हैं।

(i) $H_{2(n-a)}(Y)=\frac{(Y)^{2n}\, 2^{2n-2a}}{\Gamma(\frac{1}{2}-n+a)} \triangle_a^{n-a}\left[\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}-a)_n\, Y^{2a}}\right]$

(ii) $L^{(\lambda)}_{(n-a)}(Y)=\frac{(-Y)^n(-1)^a}{(n-a)!\,\Gamma(a-\lambda-n)} \triangle_a^{n-a}\left[\frac{(-1)^{n+a}\,\Gamma(a-1-n)}{Y^a}\right]$

(iii) $\varphi_{(n-a)}(x; \lambda)=\frac{(e^{-\lambda}-1)^n(-1)^a}{(n-a)!\,\Gamma(a-n)} \triangle_a^{n-a}\left[\frac{(-1)^n(1+x)_{n-a}\,\Gamma(-a)}{(e^{-\lambda}-1)^a}\right]$

(iv) $\varphi_{(n-a)}(x)=\frac{(-1)^h}{(n-a)!\,\Gamma(1-c-n+a)} \triangle_a^{n-a}\left[(c)_{n-a}(x)_{n-a}\, x^a(-1)^n\, \Gamma(1-c-n+a)\right]$,

जहाँ $\varphi_n(x, \lambda)$ गाटलीब बहुपद है तथा $\ddot{\varphi}_n(x)$ सिलवेस्टर बहुपद है।

ठीक इसी विधि से अग्रसर होने पर हमें तीन दशाओं के निम्नांकित फल प्राप्त हो सकते हैं जो हैं:

$m_4\beta>1$ के लिये

$$\overline{R}^{0(\alpha+a)}_{(n-a)m_4}(x, y)=\frac{(\mu E v^r 1)^{m_4 n} x^{ma}(2\pi)^{(m_4-1)/2} m_4^{-(m_4 n+1/2)}}{(n-a)!\, v^a(-1)^a}$$

$$\times \triangle_a^{n-a}\left[\frac{[(M_1(i, j))]_{(n-a)m_4}\,[1-(M_2(i, j))]_{(n-a)m_4}\,(-1)^{n+a} m_4^{m_4 a}(-v)^a\, 1}{[(N_1(i, j))]_{(n-a)m_4}\,[1-(N_2(i, j))]_{(n-a)m_4}\,(\mu E v^r 1)^{m_4 a} x^{ma}\, \Gamma\left[n+\frac{(m_4-1)}{m_4}-a\right]}\right] \tag{1·7}$$

$m_4\beta<0$ के लिये

$$\overline{R}^{0(a+a)}_{(n-a)m_4}(x, y)=\frac{(\mu Ev^r\ 1)^{m_4n}\ x^{ma}\ (2\pi)^{(m_4-1)/3}\ m_4^{(m_4n+1/2)}}{(n-a)!\ v^a}$$

$$\times\Delta_a^{n-a}\left[\frac{[(M_1(i,j))]_{(n-a)m_4}[1-(M_2(i,j))]_{(n-a)m_4}(-1)^{n+a}m_4^{m_4a}\ v^a}{[(N_1(i,j))]_{(n-a)m_4}\ [1-(N_2(i,j))]_{(n-a)m_4}(\mu Ev^r\ 1)^{m_4a}\ x^{ma}\ \Gamma\left[n+\frac{(m_4-1)}{m_4}-a\right]}\right] \quad (1\cdot 8)$$

$m_4\beta=0$ के लिये

$$\overline{R}^{0(\alpha+a)}_{(n-a)m_4}(x, y)=\frac{(\mu Ev^r\ 1)^{m_4n}\ x^{ma}\ (2\pi)^{(m_4-1)/2}m_4^{-(m_4n+1/2)}}{(n-a)!\ v^a\ \Gamma(\alpha+a)}$$

$$\times\Delta_a^{n-a}\left[\frac{[(M_1(i,j))]_{(n-a)m_4}[1-(M_2(i,j))]_{(n-a)m_4}(-1)^{n+a}\ m_4^{m_4a}\ v^a\ \Gamma(\alpha+a)}{[(N_1(l.j))]_{(n-a)m_4}[1-(N_2(i,j))]_{(n-a)m_4}(\mu Ev^r\ 1)^{m_4a}\ x^{ma}\ \Gamma\left[n+\frac{(m_4-1)}{m_4}-a\right]}\right]$$

निर्देश

1. रेनविले, ई० डी०, Special function, **मेकमिलन, न्यूयार्क**, 1960
2. **फाक्स, सी०, ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, 98, 395-429

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October 1977, Pages 337-341

फाक्स के H-फलन हेतु एक नवीन द्विगुण समाकल

के० सी० गुप्ता तथा एस० हण्डा
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त—जनवरी 13, 1977]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य एक द्विगुण समाकल की स्थापना है जिसे विभिन्न चरों वाले दो फाक्स के H-फलनों का गुणनफल सन्निहित है ।

Abstract

A new double integral for Fox's H-function, *By* K. C. Gupta and S. Handa, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur and University of Rajasthan, Jaipur.

The aim of this paper is to establish a double integral which involves product of two Fox's H-function of different arguments. On account of the most general nature of our integral a number of known or new integral formulae of interest to mathematical analysis and applied mathematicians can be obtained by suitably specializing the parameters of the H-functions involved therein.

1. प्रस्तावना :

प्रस्तुत प्रपत्र में एक द्विगुण समाकल स्थापित किया गया है जिसमें भिन्न चरों वाले दो फाक्स के H-फलन का गुणनफल है । यह समाकल अतीव व्यापक है अतः गणितीय विश्लेषण एवं सम्प्रयुक्त गणितज्ञों के रुचि के कई नूतन समाकल सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं ।

2. प्रमुख समाकल :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, (Ax^\gamma+By^\delta)^\sigma (Ax^\gamma+By^\delta+a)^{-\lambda}$$

$$\times H_{p,q}^{m,n}\left[Wx^s y^k (Ax^\gamma + By^\delta)^r \,\middle|\, \begin{matrix}(a_j, A_j)_{1,p}\\(\beta_j, B_j)_{1,q}\end{matrix}\right]$$

$$\times H_{P,Q}^{M,O}\left[b(Ax^\gamma+By^\delta+a)^\mu \,\middle|\, \begin{matrix}(\gamma_j,C_j)_{1,P}\\(\delta_j,D_j)_{1,Q}\end{matrix}\right] dx\,dy$$

$$=\frac{A^{-\alpha/\gamma}\,B^{-\beta/\gamma}}{\gamma\delta}\,a^{\eta-\lambda}\sum_{h=1}^{m}\sum_{R=0}^{\infty}\frac{(-1)^R}{R\,!}\cdot\frac{1}{B_h}\,g(\eta_r)$$

$$\times\left[a^\theta\,W\left(\frac{1}{A}\right)^{s/\gamma}\left(\frac{1}{B}\right)^{k/\delta}\right]^{\eta R} H_{P+1,Q+1}^{M+1,O}\left[ba^\mu \,\middle|\, \begin{matrix}(\gamma_j, C_j)_{1,P}, (\lambda, \mu)\\(\lambda-\eta-\theta^\eta{}_R{}^\mu),(\delta_j, D_j)_{1,Q}\end{matrix}\right] \tag{2·1}$$

जहाँ

$$\eta_R=\frac{\beta_h+R}{B_h} \tag{2·2}$$

$$g(\eta_R)=\frac{\Gamma(\eta+\theta\eta_R)\prod_{\substack{j=1\\j\neq h}}^{m}\Gamma(\beta_j-B_j\eta_R)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+A_j\eta_R)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-A_j\eta_R)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j+B_j\eta_R)}$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{s}{\gamma}\eta_R\right)\,\Gamma\left(\frac{\beta}{\delta}+\frac{k}{\delta}\eta_R\right)}{\Gamma(\eta-\sigma+\{\upsilon-r\}\eta_R)} \tag{2·3}$$

$$\theta=r+\frac{s}{\gamma}+\frac{k}{\delta}$$

$$\eta=\sigma+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta} \tag{2·4}$$

एवं $(a_j, A_j)_{n+1,p}$ के द्वारा $p-n$ प्राचल युग्मों $(a_{n+1}, A_{n+1}), \ldots, (a_p, A_p)$($n$ एवं p ऐसे पूर्णांक हैं कि $0\leqslant n\leqslant p$) का बोध होता है और आगे भी इसी प्रकार। निम्नांकित प्रतिबन्धों के समुच्चय की तुष्टि होती है

$$A, B, \gamma, \delta, s, k, r \text{ तथा } a \text{ धन संख्यायें हैं } Re(\alpha)>0, Re(\beta)>0 \tag{2·5}$$

$$\lambda'=\sum_{j=1}^{n}(A_j)-\sum_{j=n+1}^{p}(A_j)+\sum_{j=1}^{m}(B_j)-\sum_{j=m+1}^{q}(B_j)>0,\ |\arg W|<\tfrac{1}{2}\lambda'\pi \tag{2·6}$$

$$\lambda'''=\sum_{j=1}^{M}(D_j)-\sum_{M+1}^{Q}(D_j)-\sum_{j=1}^{P}(C_j)>0,\ \mu>0,\ |\arg b|<\tfrac{1}{2}\lambda'''\pi \tag{2·7}$$

$$\sum_{j=1}^{Q}(D_j)-\sum_{j=1}^{P}(C_j)>\mu>0 \tag{2·8}$$

$$\sum_{j=1}^{q}(B_j)-\sum_{j=1}^{p}(A_j)>\theta>0 \tag{2·9}$$

$$-\min Re\left\{\theta\frac{\beta_j}{B_j}\right\}<Re(\eta),\ (j=1,\ \ldots,\ m) \tag{2·10}$$

प्रमुख समाकल में आया H-फलन निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_j,\ A_j)_{1,p}\\(\beta_j,\ B_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)z^s\,ds \tag{2·11}$$

जहाँ

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\beta_j-B_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+A_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j+B_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-A_js)} \tag{2·12}$$

[(2·11) में कंटूर L की प्रकृति, समाकल के अभिसरण के प्रतिबन्ध एवं H-फलन के कुछ महत्वपूर्ण गुण, विशिष्ट दशायें एवं उपगामी प्रसारों को गुप्ता तथा जैन[3] के प्रपत्र में देखा जा सकता है]

प्रमुख समाकल की उपपत्ति :

माना कि

$$\triangle=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}f(Ax^\gamma+By^\delta)$$
$$\times H_{p,q}^{m,n}\left[Wx^s\,y^k(Ax^\gamma+By^\delta)^r\left|\begin{matrix}(a_j,\ A_j)_{1,p}\\(\beta_j,\ B_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]dx\,dy \tag{2·13}$$

(जहाँ फलन f ऐसा है कि द्विगुण समाकल अभिसारी होता है) तथा H-फलन के स्थान पर (2·11) तथा (2·12) के द्वारा दिया गया इसका मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल प्रतिस्थापित किया जाता है। समाकलन के क्रम को उलटने पर, जो (2·1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, हम पाते हैं कि

$$\triangle=\frac{1}{2\pi i}\int_L W^\xi\phi(\xi)\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha+s\xi-1}\,y^{\beta+k\xi-1}(Ax^\gamma+By^\delta)^{r\xi}(Ax^\gamma+By^\delta)\,dxdy\right\}d\xi \tag{2·14}$$

जहाँ

$$\phi(\xi)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\beta_j-B_j\xi)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+A_j\xi)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j+B_j\xi)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-A_j\xi)}$$

अब एक ज्ञात फल [1, p.172] के द्वारा

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} f(Ax^\gamma + By^\delta)\, dx\, dy$$

$$= \frac{A^{-\alpha/\gamma} B^{-\beta/\delta}}{\gamma\delta} \frac{\Gamma(\alpha/\gamma)\Gamma(\beta/\delta)}{\Gamma(\alpha/\gamma+\beta/\delta)} \int_0^\infty z^{\alpha/\gamma+\beta/\delta-1} f(z)\, dz \tag{2·15}$$

$Re(\alpha)>0$, $Re(\beta)>0$; A, B, γ, δ सभी धन सख्यायें हैं और (2·11) तथा (2·12) में आये H-फलन की परिभाषा के अनुरूप हैं, इसकी पुष्टि होती है कि

$$\triangle = \frac{A^{-\alpha/\gamma} B^{-\beta/\delta}}{\gamma\delta} \int_0^\infty z^{\eta-\sigma-1} f(z)\ H^{m,n+2}_{p+2,\,q+1}\left[W\left(\frac{z}{A}\right)^{s/\gamma} \left(\frac{z}{B}\right)^{k/\delta} z^r \middle| \begin{matrix} (1-\alpha/\gamma,\, s/\gamma),(1-\beta/\delta,\, k/\delta),\, (a_j,\, A_j)_{1,p} \\ (\beta_j,\, B_j)_{1,q}\ (1-\eta+\sigma,\, \theta-r) \end{matrix} \right] dz \tag{2·16}$$

जहाँ θ तथा η (2·4) द्वारा दिये जाते हैं।

अब यदि हम (2·1) में

$$f(z) = z^\sigma (z+a)^{-\lambda}\ H^{M,0}_{P,Q}\left[b(z+a)^\mu \middle| \begin{matrix} (\gamma_j,\, C_j)_{1,P} \\ (\delta_j,\, D_j)_{1,Q} \end{matrix} \right]$$

लें और परिणामी समाकल का मान निम्नांकित फल[4] की सहायता से ज्ञात करें

$$\int_0^\infty z^{\eta-1} (z+a)^\lambda\ H^{m,n}_{p,q}\left[W\left(\frac{1}{A}\right)^{s/\gamma} \left(\frac{1}{B}\right)^{k/\delta} z^\theta \middle| \begin{matrix} (a_j,\, A_j)_{1,p} \\ (\beta_j,\, B_j)_{1,q} \end{matrix} \right]$$

$$\times H^{M,0}_{P,Q}\left[b(z+a)^\mu \middle| \begin{matrix} (\gamma_j,\, C_j)_{1,P} \\ (\delta_j,\, D_j)_{1,Q} \end{matrix} \right] dz$$

$$= a^{\eta-\lambda} \sum_{h=1}^{m} \sum_{R=0}^{\infty} \frac{(-1)^R}{R\,!} \frac{1}{B_h}\, g(\eta_R) \left\{ W\left(\frac{1}{A}\right)^{s/\gamma} \left(\frac{1}{B}\right)^{k/\delta} a^\theta \right\}^{\eta_R}$$

$$\times H^{M+1,\,0}_{P+1,Q+1}\left[ba^\mu \middle| \begin{matrix} (\gamma_j,\, C_j)_{1,P},\, (\lambda,\, \mu) \\ (\lambda-\eta+\theta\eta_R,\, \mu),(\delta_j.\, D_j)_{1,Q} \end{matrix} \right] \tag{2·17}$$

[जहाँ η_R, $g(\eta_R)$, θ, तथा η से (2·2), (2·3), (2·4) द्वारा परिभाषित संख्याओं का बोध होता है और (2·5) से (2·10) तक के प्रतिबन्धों की तुष्टि हो जाती है] थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें (2·1) प्राप्त होता है।

3. विशिष्ट दशायें

प्रारम्भ में ही यह बता दिया जाय कि (2·1) में आगत H-फलन एक बहु परिचित माइजर के G-फलन[5] में समानीत हो जाता है जब विशिष्ट दशा के रूप में $A_j=1$ ($j=1, \ldots, p$) तथा $B_j=1$ ($j=1, \ldots, q$) पुनः हमें प्राप्त होता है : [2, p. 215]

$$
{}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p\\ \beta_1, \ldots, \beta_q\end{matrix}; z\right]
$$

$$
=\frac{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(\beta_j)}{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(\alpha_j)}\cdot G^{1,p}_{p,q+1}\left[-z\left|\begin{matrix}1-\alpha_1, \ldots, 1-\alpha_p\\ 0, (1-\beta_1), \ldots, 1-\beta_q\end{matrix}\right.\right]
$$

($p\leqslant q$, या $p=q+1$ तथा $|z|<1$),

इस प्रकार (2·1) की विशिष्ट दशाओं के रूप में अनेक रोचक एवं उपयोगी समाकल प्राप्त किये जाते हैं।

निर्देश

1. एडवर्ड, जे, A Treatise on the Integral Calculus, भाग II, चेलसिया पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1954.
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953.
3. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया, 1966, 36A, 594-609.
4. गुप्ता के० सी० तथा कौल, सी० एल०, (प्रकाशनाधीन)
5. माइजर, सी० एस०, Nederal. Akad., Wetensch. Proc. Ser. 1946, A 49, pp. 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1073, 1175-1175.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October 1977, Pages 343-348

फाक्स के H-फलन हेतु फूरियर श्रेणी

के० के० बावेजा

गणित विभाग, लालनाथ हिन्दू कालेज, रोहतक

[प्राप्त—दिसम्बर 17, 1976]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में फाक्स के H-फलन वाले एक समाकल का मान ज्ञात किया गया है जिसका उपयोग H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी प्राप्त करने के लिये किया गया है। कुछ विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

A Fourier series for Fox's H-function. *By* K. K. Baweja, Department of Mathematics, Lal Nath Hindu College, Rohtak.

In this note an integral involving Fox's H-function has been evaluated which has been used to obtain a Fourier series for the H-function. Some particular cases have been given at the end.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य फाक्स के H-फलन वाले एक समाकल का मान ज्ञात करना तथा इसका उपयोग H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी की स्थापना करना है। माइजर के G-फलन तथा मैकराबर्ट के E फलन के लिये विशिष्ट दशाओं के रूप में फूरियर श्रेणियां प्राप्त की गई हैं।

फाक्स [3, p. 408] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्न प्रकार से प्रदर्शित एवं परिभाषित किया जावेगा।

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \middle| \begin{matrix} (a_1, e_1), \dots, (a_p, e_p) \\ (b_1, f_1), \dots, (b_q, f_q) \end{matrix} \right]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - f_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + e_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + f_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - e_j s)} z^s \, ds \tag{1·1}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई के रूप में मान लिया गया है, $0 \leqslant m \leqslant q, 0 \leqslant n \leqslant p$; समस्त e तथा f धन संख्यायें हैं, L बार्नीज प्रकार का ऐसा उपयुक्त कंटूर है कि $\Gamma(b_j - f_j s), j=1, 2, \ldots, m$; के पोल कंटूर के दाहिनी ओर पड़े तथा $\Gamma(1-a_j+e_j s), j=1, 2, \ldots, n$ के कंटूर बाईं ओर।

ब्राक्समा [1] ने H फलन के उपगामी प्रसारों तथा वैश्लेषिक संतति की विवेचना की है।

संक्षेपण की दृष्टि से आगे (a_p, e_p) से $(a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)$ का तथा संकेत $\triangle(\delta, \alpha)$ से प्राचलों के समुच्चय $\alpha/\delta, (\alpha+1)/\delta, \ldots, (\alpha+\delta-1)/\delta$ का बोध कराया गया है जहाँ δ धन पूर्णाङ्क है।

2. समाकल

हम निम्नांकित समाकल की स्थापना करेंगे

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^\alpha \cos\beta\theta \; H_{p,\, q}^{m,\, n}\left[z\,(\cos\theta)^{2\delta} \left| \begin{matrix} (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q) \end{matrix} \right.\right]$$

$$=(\sqrt{\pi}/2)\; H_{p+2,\, q+2}^{m,\, n+2}\left[z \left| \begin{matrix} \left(\frac{1-\alpha}{2}, \delta\right), \left(-\frac{\alpha}{2}, \delta\right), (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q), \left(-\frac{\alpha+\beta}{2}, \delta\right), \left(\frac{-\alpha+\beta}{2}, \delta\right) \end{matrix} \right.\right] \tag{2·1}$$

जहाँ δ एक धन संख्या है तथा

$$\sum_{j=1}^{q} e_j - \sum_{j=1}^{p} f_j \leqslant 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=n+1}^{p} f_j + \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=m+1}^{q} f_j \equiv A > 0$$

$$|\arg z| < A\pi/2, \; Re(\alpha) > -1.$$

$$Re(2\delta\, b_j/f_j) > -1-\alpha, \; (j=1, 2, \ldots, m)$$

उपपत्ति

(2·1) की स्थापना के लिये H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल (1·1) के रूप में व्यक्त करने तथा समाकलन के क्रम को परस्पर-विनिमय करने पर जो इस प्रक्रम में सन्निहित समाकलों के परम अभिसरण के कारण वैध है

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{q}\Gamma(a_j-e_js)}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{\alpha+2\delta s}$$

$$\times\cos\beta\theta\, d\theta\, ds.$$

अब सूत्र [4, p. 1615] अर्थात्

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{\alpha}\cos\beta\theta\, d\theta=\frac{\pi\,\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$Re\ \alpha>-1$$

की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करने तथा गामा फलनों [5, p. 24 (2)] के द्विगुणन सूत्र का अर्थात्

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2)$$

का प्रयोग करने पर

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}(1-a_j+e_js)\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+\delta s\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}+\delta s\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)\,\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}+\delta s\right)}$$

$$\times\frac{z^s}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}+\delta s\right)}\,ds$$

(1·1) के सम्प्रयोग से समाकल (2·1) प्राप्त होता है।

3. फूरियर श्रेणी

स्थाप्य फूरियर श्रेणी है

$$(\cos\phi/2)^{\alpha}\,H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z(\cos\phi/2)^{2\delta}\left|\begin{matrix}(a_p,\,e_p)\\(b_q,\,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,H^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[z\left|\begin{matrix}\left(\frac{1-\alpha}{2},\,\delta\right),\,(-\alpha/2,\,\delta),\,(a_p,\,e_p)\\(b_q,f_q),\,\left(-\frac{\alpha}{2}-r,\,\delta\right),\,\left(-\frac{\alpha}{2}+r,\,\delta\right)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times\cos r\phi, \qquad (3\cdot1)$$

जहाँ δ धन संख्या है तथा

$$\sum_{j=1}^{p} e_j-\sum_{j=1}^{q} f_j\leqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j-\sum_{j=n+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{m} f_j-\sum_{j=m+1}^{q} f_j\equiv A>0,$$

$$|\arg z|<A\pi/2,\ Re(2\delta\, b_j/f_j)>-1-\alpha\ (j=1,2,\ldots,m),\ Re(\alpha)>-1$$

उपपत्ति : माना

$$f(\phi)=(\cos\phi/2)^{\alpha}\,H^{m,\,n}_{p,\,q}\left[z(\cos\phi/2)^{2\delta}\left|\begin{matrix}(a_p,\,e_p)\\(b_q,\,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=A_0/2+\sum_{r=1}^{\infty}A_r\cos r\phi \qquad (3\cdot2)$$

समीकरण (3·2) वैध है क्योंकि $f(\phi)$ संतत है तथा अन्तराल $(0,\pi)$ में परिबद्ध विचरण वाला है। अब (3·2) के दोनों पक्षों को $\cos t\phi$ से गुणा करने तथा $0-\pi$ के अन्तराल में ϕ के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^{\pi}\cos t\phi(\cos\phi/2)^{\alpha}\,H^{m,\,n}_{p,\,q}\left[z(\cos\phi/2)^{2\delta}\left|\begin{matrix}(a_p,\,e_p)\\(b_q,\,f_q)\end{matrix}\right.\right]d\phi$$

$$=\int_0^{\pi}\tfrac{1}{2}A_0\cos t\phi\,d\phi+\sum_{r=1}^{\infty}A_r\int_0^{\pi}\cos r\phi\cos t\phi\,d\phi.$$

(2·1) में $\theta=\phi/2,\ t=\beta$ रखने तथा कोज्या फलनों के लाम्बिकता गुण का प्रयोग करने पर

$$A_t=(2/\sqrt{\pi})\ H^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[z\left|\begin{matrix}\left(\frac{1-\alpha}{2},\,\delta\right)-\alpha/2,\,\delta),\,(a_p,\,e_p)\\(b_q,f_q),\,(-\alpha/2-t,\,\delta),\,(-\alpha/2+t,\,\delta)\end{matrix}\right.\right] \qquad (3\cdot3)$$

(3·2) तथा (3·3) से तुरन्त ही परिणाम (3·1) प्राप्त होता है।

4. विशिष्टि दशायें

प्राचलों के विशिष्टीकरण से H-फलन को माइजर के G-फलन, मैकराबर्ट के E फलन तथा अन्य उच्चतर अबीजीय फलनों [2, p. 215-222] में रूपान्तरित किया जा सकता है। फलस्वरूप ये परिणाम व्यापक प्रकृति के तथा अनेक रोचक दशाओं को स्पर्श करने में समर्थ हैं। फिर भी कुछ महत्वपूर्ण विशिष्ट दशायें दी जा रही हैं।

(3·1) में $e_j=f_j=1$ $(j=1, 2, ..., p;\ i=1, 2, ..., q)$ रखने तथा [2, p. 4 (11)], [2, p. 207, (1)] की सहायता से सरल करने पर हमें

$$(\cos \phi/2)^{\alpha}\ G_{p,\ n}^{m,\ n}\left[z(\cos \phi/2)^{2\delta}\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right] \tag{4·1}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}\delta}\ G_{p+2,\ q+2}^{m,\ n+2}\left[z\left|\begin{matrix}\triangle\left(\delta, \frac{1-\alpha}{2}\right), \triangle(\delta, -\alpha), a_p\\ b_q, \triangle(\delta, -\alpha/2-r), \triangle(\delta, -\alpha/2+r)\end{matrix}\right.\right] \times \cos r\phi$$

प्राप्त होता है जहाँ $2(m+n)>p+q$, $|\arg z| <[m+n-(p+q)/2]\pi$.

(3·1) में m, n, p, q के स्थान पर क्रमशः $p, 1, q+1, p$ रखने पर तथा सूत्र

$$H_{q+1,\ p}^{p,\ 1}\left[z\left|\begin{matrix}(1, 1), (\beta_q, 1)\\(\alpha_p, 1)\end{matrix}\right.\right]=E\left[\begin{matrix}\alpha_p\\ \beta_q\end{matrix} : z\right]$$

के परिपेक्ष्य में प्राचलों को उपयुक्त ढंग से रखने पर

$$(\cos \phi/2)^{\alpha}\ E\left[\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix} : z(\cos \phi/2)^{2\delta}\right] \tag{4·2}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ H_{q+3,\ p+2}^{p,\ 3}\left[z\left|\begin{matrix}\left(\frac{1-\alpha}{2}, \delta\right), (-\alpha/2, \delta), (1, 1), (b_q, 1)\\ (a_p, 1), (-\alpha/2-r, \delta), (-\alpha/2+r, \delta)\end{matrix}\right.\right] \times \cos r\phi$$

जहाँ $p\geqslant q+1$, $|\arg z| <\pi$

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compositio Math. 1963, **15**, 239-341

2. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, **भाग I मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1953

3. फाक्स, सी०, ट्रान्जै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, 98, 395-429

4. ल्यूक, वाई० एल०, The Special Functions and Their approximations, भाग I एकेडमिक प्रेस लन्दन, 1969

5. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, मैकमिलन, न्यूयार्क 1967

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages 349-356

पाइराइट द्वारा भूमि का सुधार

बलराम सिंह, प्यारे लाल त्यागी, राम अक्षयबर मिश्र तथा रमाकान्त
संभागीय कृषि परीक्षण एवं प्रदर्शन केन्द्र, वाराणसी

[प्राप्त—जनवरी 10, 1977]

सारांश

उत्तम सिचाई उपलब्ध रहने पर प्रति हेक्टर 6 से 7 टन पाइराइट तथा 7·5 से 8 धान का पुआल डाल करके मात्र 1500-1600 रु० प्रति हे० की लागत से ऊसर का सुधार सफलतापूर्वक किया गया। प्रारम्भ में प्रति हेक्टर 160 कि० ग्रा० प्रति हेक्टर नाइट्रोजन वाला अम्लीय उर्वरक, 80 कि०ग्रा० फास्फोरस, 80 कि०ग्रा० पोटाश तथा 30 कि०ग्रा० जिंक सल्फेट देकर बेकार पड़ी ऊसर भूमि से 45 कुन्तल हे० धान की उपज ली गई।

Abstract

Reclamation of usar soils by pyrites. *By* Balram Singh, P. L. Tyagi, Ram Akshaibar Mishra and Ramakant, Regional Agriculture Testing and Demonstration Centre, Varanasi.

Under the assured irrigation facilities, alkaline soils were easily reclaimed by the application of 6 to 7 tons of pyrites per hectare along with 7·50 to 8 tons of paddy straw with a total cost of Rs.1500 to 1600. The land, which remained unsuitable for cultivation since long back, gave 45 quintals of paddy grain yield in the very begining at a fertility level of 160 Kg. N+80 Kg. P+80 Kg. K+30 Kg. $ZnSO_4$ per hectare. Supply of nitrogen must be in the form of acid forming nitrogenous fertilizer.

भारतवर्ष के एक विशाल भू-भाग (लगभग 70 लाख हेक्टर) में ऊसर भूमि है जिसका सुधार करके लगभग 25 करोड़ टन अधिक अन्न पैदा किया जा सकता है। उत्तर-प्रदेश में ऐसी भूमि का क्षेत्रफल लगभग 13 लाख हे० है। यदि इसका सुधार कर दिया जाय तो निःसंदेह प्रदेश की दीन जनता के सहायतार्थ एक क्रान्तिकारी कदम होगा। अब तक ऊसर सुधार का कार्य जिप्सम से होता रहा है। चूंकि जिप्सम राजस्थान से प्राप्त होता है इसलिये पूर्वी उत्तर-प्रदेश के लिये परिवहन का व्यय अधिक होने से

यह बहुत मँहगा पड़ जाता था। इस समस्या के निराकरण के लिये अमझोर, बिहार की खानों में पाये जाने वाले पाइराइट का प्रयोग जिसमें कि 15—20% गंधक पाया जाता है बहुत ही लाभदायक सिद्ध हुआ है। इसका रासायनिक सूत्र फेरस सल्फाइड (FeS_2) है।

सारणी 1

दाने की उपज कुन्तल/हेक्टयर

क्र०सं०	कारक	खरीफ	खरीफ		रबी	
		1974-75	1975-76	1976-77	1974-75	1975-76
		धान आई० आर० 8	धान आई० आर० 8	धान आई० आर० 8	गेहूँ सोनालिका	गेहूँ एच० डी
1.	नियंत्रण	6·42	38·84	18·37	13·02	16·19
2.	जिप्सम 50% जि०आ० +निच्छालन	15·10	44·72	27·92	19·42	16·60
3.	जिप्सम 50% जि०आ० +धान का पुआल दर 20 टन/हे०	10·05	40·42	28·55	18·97	17·50
4.	पाइराइट 100% जि०आ० के बराबर+निच्छालन	9·81	47·87	30·75	21·20	19·57
5.	पाइराइट 50% जि०आ० के बराबर+निच्छालन	8·32	49·92	29·30	19·81	16·47
6.	पाइराइट 50% जि०आ० के बरावर+धान का पुआल दर 20 टन/हे०	16·65	47·36	32·95	19·13	20·08
	सी० बी०	48·85%	12·97%	5·21%	8·46%	9·48%
	सी०डी 5% पर कुं०/हे०	सार्थक नहीं।	सार्थक नहीं।	2·20	2·37	2·53

ऊसर सुधार पर काफी शोध पत्र प्रकाशित हो चुके हैं। एब्राल तथा डरगन[3], मेहता तथा एब्राल[7], गौल तथा आचार्या [4], डरगन, गौल तथा एब्राल [5] एवं एब्राल [6] ने पाइराइट द्वारा ऊसर सुधार किया है तथा इसके उपयोग की अनुशंसा की है।

प्रयोगात्मक

अध्ययन के लिये एकत्रित किये गये मृदा न्यादर्श को सुखाकर, चूर्ण करके तथा 70 मेश की चलनी से चाल कर सूखे डिब्बों में रखा गया।

इनके रासायनिक संघटन का अध्ययन मानक विधियों के आधार पर किया गया [1]। पी-एच पी-एच मीटर द्वारा, कार्बनिक कार्बन वाकले एवं ब्लैक विधि से, प्राप्य फास्फोरस ओल्सेन्स विधि से, प्राप्य पोटाश कोबाल्टीनाइट्राइट टरबीडीमेट्रिक विधि से तथा जिप्सम आवश्यकता (जि०आ०) का निर्धारण स्कूनोवर जिप्सम आवश्यकता विधि से निकाला गया।

जिप्सम तथा पाइराइट का ऊसर सुधार में तुलनात्मक प्रभाव देखने के लिये एक परीक्षण राजकीय कृषि प्रक्षेत्र कल्लोपुर, जनपद वाराणसी, में खरीफ 1974-75 से प्रारंभ किया गया जहाँ पर बहुत बड़े क्षेत्र में कई वर्षों से बिना खेती किये ऊसर भूमि पड़ी थी। परीक्षण का विवरण निम्नवत् है :—

1. सांख्यिकीय आकृति एवं लेआउट—रेन्डोमाइज्ड ब्लाक डिजाइन
2. आवृति—4
3. क्यारियों का आकार—10×10 मीटर
4. मृदा विश्लेषण :—
   - (अ) पी-एच, : 9.5 से 10·0
   - (ब) कार्बनिक कार्बन : अतिन्यून (0·204%)
   - (स) प्राप्य फास्फोरस : न्यून (10-20 कि०ग्रा०/हे०)
   - (द) प्राप्य पोटाश : न्यून (51-100 कि०ग्रा०/हे०)
   - (य) जिप्सम आवश्यकता (जि० आ०): 36·120 टन/हे०
5. कारक : 1. नियंत्रण
   2. जिप्सम 50% जि०आ०+निच्छालन
   3. जिप्सम 50% जि०आ०+धान का पुआल दर 20 टन/हे०

4. पाइराइट 100% जि०आ० के तुल्य+निच्छालन
5. पाइराइट 50% जि०आ० के तुल्य+निच्छालन
6. पाइराइट 50% जि०ग्रा० के तुल्य+धान का पुआल दर 20 टन/हे०

उपर्युक्त परीक्षण के लिये खेत को 10×10 मी० क्यारियों में बाँट लिया गया। इसके बाद कारकों के अनुसार जिप्सम या पाइराइट डालकर जुताई कर दी गई। पुआल वाले कारक में पहले पुआल डाल कर तब जिप्सम या पाइराइट डाला गया। फिर क्यारियों में 5-6 से०मी० पानी लगाकर हानिकारक लवणों को निक्षालित किया गया। तत्पश्चात निक्षालन को सफलतापूर्वक सम्पन्न करने के लिये चार-पाँच बार खेत में पानी लगाया गया। इसके बाद नाइट्रोजन 160 कि०ग्रा०, फास्फोरस 80 कि०ग्रा०, पोटाश 80 कि०ग्रा० तथा जिंक सल्फेट 30 कि०ग्रा० प्रति हेक्टर की दर से डालकर जुताई कर दी गई। खेत में पानी लगाकर बिना पाटा चलाये धान आई० आर० 8 की चार-पाँच पौधें एक जगह लगाई गईं। जिप्सम और पाइराइट को एक बार देने के बाद मिट्टी पर उसका अवशिष्ट प्रभाव देखने के लिये वर्षों तक फसलें ली गईं। उपर्युक्त में नाइट्रोजन की पूर्ति अमोनियम सल्फेट से की गई क्योंकि इसका प्रभाव अम्लीय होता है, फास्फोरस की सुफरफास्फेट सिंगिल से तथा पोटाश की म्युरिएट आफ पोटाश से की गई (सारिणी 1 देखिये)। सारणी 2 में विभिन्न उपचारों के फलस्वरूप पी-एच तथा उर्वरता स्तर में जो अन्तर आया वह प्रदर्शित है।

सारणी 2

धान की फसल लेने के बाद मिट्टी का विश्लेषण

	कारक	पी० एच०	कार्बनिक कार्बन%	प्राप्य पोटाश	प्राप्य फास्फोरस कि०/हे०
1.	नियंत्रण	9·2	0·205%	न्यून (51–100 कि०ग्रा०हे०)	56 कि०ग्रा०/हे० अति न्यून
2.	जिप्सम 50% जि०आ० +निच्छालन	8·5	0·210%	न्यून	7·2 कि०ग्रा०/हे०
3.	जि० 50% जि०ग्रा+धान का पुआल दर 20 टन/हे०	8·5	0·341%	न्यून ,,	8·8 कि०ग्रा०/हे०
4.	पाइराइट 100% जि० ग्रा०के बराबर +निच्छालन	8·5	0·221%	न्यून ,,	10·6 कि०ग्रा०/हे०
5.	पाइराइट 50% जि०ग्रा० के बराबर+निच्छालन	8·5	0·212%	न्यून ,,	7·2 कि०ग्रा०/हे०
6.	पाइराइट 50% जि०ग्रा० के बराबर+धान का पुआल दर 20 टन/हे०	8·4	0·342%	न्यून ,,	11·0 कि०ग्रा०/हे० न्यून

उपर्युक्त ढंग से खेत में धान का पुआल और पाइराइट को डालकर जौनपुर, गाजीपुर तथा वाराणसी जनपद के कुछ कृषकों के यहाँ इसका प्रदर्शन भी किया गया। कृषकों का उत्साह बढ़ाने एवं सुधार की कीमत कम करने की दृष्टि से पाइराइट केवल 6-7 टन/हे० तथा धान का पुआल 7·5-8·0 टन/हे० डाल करके प्रदर्शन का कार्य संचालित किया गया। ये मिट्टियाँ कई वर्षों से बिना खेती किये हुये परती पड़ी थीं लेकिन पाइराइट एवं धान का पुआल डाल कर सुधार किया गया तो उत्साहवर्धक परिणाम प्राप्त हुये जो सारिणी 3 में प्रदर्शित किये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

पाइराइट एक अयस्क खनिज है जो कि रोहतास, बिहार के अमझोर की खानों में प्रचुर मात्रा में निकाला जाता है। इसका रासायनिक सूत्र फेरस सल्फाइड (FeS_2) है। जब इसे कैल्सियम युक्त लवणीय क्षारीय मृदा में (calcareous saline alkali soil) या अलवणीय क्षारीय मृदा (noncalcareous saline alkali soil) में डाला जाता है तो सल्फर निकलता है जिसके आक्सीकरण के फलस्वरूप सल्फाइट (SO_3) बनाता है। सल्फाइट जल से संयोग करके H_2SO_4 बनाता है। यह अम्ल मिट्टी में उपस्थित सोडियम बाइ-कार्बोनेट, $NaHCO_3$, सोडियम कार्बोनेट Na_2CO_3 तथा कैल्सियम कार्बोनेट $CaCO_3$ आदि से अभिक्रिया करके उनके सल्फेट, जल तथा कार्बन डाइ आक्साइड बनाता है। सल्फेट कम हानिकारक लवण होता है और यह निक्षालित होकर भूमि के अन्दर चला जाता है। अभिक्रया निम्न प्रकार है :

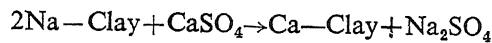
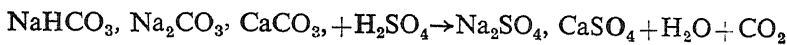
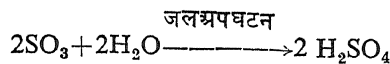
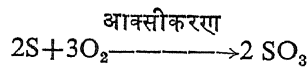
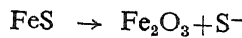
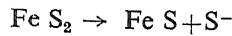
$$Fe\,S_2 \rightarrow Fe\,S + S^-$$

$$FeS \rightarrow Fe_2O_3 + S^-$$

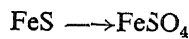
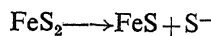
$$2S + 3O_2 \xrightarrow{\text{आक्सीकरण}} 2\,SO_3$$

$$2SO_3 + 2H_2O \xrightarrow{\text{जलअपघटन}} 2\,H_2SO_4$$

$$NaHCO_3,\ Na_2CO_3,\ CaCO_3, + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4,\ CaSO_4 + H_2O + CO_2$$

$$2Na-Clay + CaSO_4 \rightarrow Ca-Clay + Na_2SO_4$$

पाइराइट के परिवर्तन के समय फेरस सल्फेट ($FeSO_4$) का निर्माण होता है। यह भी लवणीय एवं क्षारीय मिट्टी के सुधार में एक अच्छे रासायनिक सुधारक का कार्य करता है :

$$FeS_2 \longrightarrow FeS + S^-$$

$$FeS \longrightarrow FeSO_4$$

उपर्युक्त आक्सीकरण रासायनिक अभिक्रियाओं से स्पष्ट है कि पाइराइट से कई प्रकार के रासायनिक सुधारक जैसे गंधक (सल्फर), कैल्सियम सल्फेट, तथा फेरस सल्फेट आदि उत्पन्न हो जाते हैं जो मिट्टी के पी० एच० को कम करते हैं तथा मृदा कोलायड से सोडियम आयनों का हाइड्रोजन आयन तथा कैल्सियम आयन द्वारा विस्थापन करते हैं। पोषक तत्वों की उपलब्धि में भी सुधार होता है।

लवणीय, लवणीय-क्षारीय तथा क्षारीय मिट्टी में पाइराइट को डालने से इसका अवशिष्ट प्रभाव बहुत दिनों तक रहता है जो मिट्टी में सुधार लाता है जिससे अच्छी फसल पैदा होती है।

सारणी 3

क्र० सं०	प्रदर्शन का स्थान एवं पता	प्रदर्शन के अन्तर्गत क्षेत्रफल	पाइराइट की मात्रा	मृदा का पी-एच०	फसल	उपज कुं०/हे०
1.	ग्रा०/पत्रा०-सेनापुर वि० खण्ड-केराकत जनपद-जौनपुर	एक एकड़	2·5	9·5	धान आई० आर० 24 धान आई० टी० ई० 1991	45·00
2.	ग्रा०-करमपुर, पत्रालय-औरिहर, वि० खण्ड-सैदपुर जनपद-गाजीपुर	एक एकड़	2.0	9·0	धान टा० 23	14·00
3.	ग्रा०-भिटकुरी, पत्रा०-सेवापुरी वि० खण्ड-सेवापुरी जनपद-वाराणसी	एक एकड़	2.0	9·0	धान आई आर० 8	40.00
4.	तदैव	0·5 एकड़	1·0	10·0	धान आई० आर 8	36·00
5.	ग्रा०/पो० गौरा, वि० खण्ड-सुरियावाँ जनपद-वाराणसी	एक एकड़	2·5	10·0	धान जया	22·5
6.	ग्रा०-तिरछी,-पत्रा० जलालाबाद वि० खण्ड-जखनिया जनपद-गाजीपुर	एक एकड़	2·0	9·0	धान आई० ई०टी० 1991	23.17

विशेष : उपज में अत्यधिक घट बढ़ का कारण धान की विभिन्न प्रजातियां हैं तथा क्रमांक 5 तथा 6 पर अवर्षण भी एक कारण है।

सारणी 1 के परिणामों का सांख्यिकीय विश्लेषण करने से पता चलता है कि खरीफ 1974-75 तथा 1975-76 में किसी भी कारक के फलों में महत्वपूर्ण अन्तर नहीं रहे। लेकिन आंकिक दृष्टिकोण से पाइराइट+धान के पुआल की उपज उत्साह-वर्धक रही। रबी में 1974-75 में कारकों का अवशिष्ट प्रभाव देखने के लिये यही परीक्षण जब गेहूँ (सोनालिका) पर किया गया तो पाइराइट 100% जि०आ० +निक्षालन उपचार नियंत्रण की तुलना में अच्छा रहा परन्तु अन्य कारकों से महत्वपूर्ण अन्तर नहीं दिखाई पड़ा। रबी 1975-1976 एवं खरीफ 1976-1977 में पाइराइट 50% जि०आ०+धान का पुआल 20 टन/है० तथा पाइराइट 100 जि०आ०+निच्छालन में सांख्यिकीय दृष्टि से कोई अन्तर नहीं रहा लेकिन अन्य कारकों से उत्तम रहा। लगातार परीक्षणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि ऊसर सुधार के लिये पाइराइट और धान का पुआल विशेष रूप से उत्तम है क्योंकि इसके प्रयोग से पाइराइट की मात्रा कम लगती है जिससे लागत में बचत होती है। साथ ही साथ मिट्टी में जीवाँश पदार्थ भी पर्याप्त मात्रा में मिल जाता है क्योंकि ऊसर जमीन में इसकी बहुत कमी होती है। पाइराइट द्वारा बना H_2SO_4 धान के पुआल को आसानी से सड़ा देता है। इस तरह से मृदा संगठन, संरचना, वायु संचार, जीवाणुओं की क्रियशीलता, जलधारण क्षमता एवं अन्य भौतिक गुणों में काफी सुधार आ जाती है। पूर्वी उत्तर प्रदेश के कृषकों के यहाँ पुआल पर्याप्त मात्रा में एवं सस्ते दर पर मिल जाता है।

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर कृषकों के यहाँ प्रदर्शन किये गये जिसके फल सारणी 2 में दिये गये हैं। पहली ही बार पाइराइट का प्रयोग करने से 45 कु०/है० धान की उपज मिली, वर्तमान समय में भूमि अच्छी तरह से सुधर गई है तथा कृषक अन्य उपजाऊ भूमि की तरह इस पर भी खेती कर रहे हैं। इस प्रकार ऊसर सुधारने के लिये अनुमानित लागत रु० 1500 से 1600 रु० प्रति हेक्टर आती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डा० राम कृष्ण, तत्कालीन के कृषि निदेशक को हम हार्दिक धन्यवाद देते हैं, जिन्होंने ऊसर सुधार पर कार्य करने हेतु प्रोत्साहित किया। हमारा हार्दिक धन्यवाद श्री जग्गी, प्रबंध निदेशक, पाइराइट्स फास्फेट एण्ड केमिकल्स लि०, डेहरी आनसोन, रोहतास, बिहार को भी है जिन्होंने प्रयोग एवं प्रदर्शन हेतु निःशुल्क पाइराइट प्रदान किया। वास्तव में श्री शंकर राम उप विकास आयुक्त (सम्प्रति इलाहाबाद में) वाराणसी के हम बहुत ही आभारी हैं जिनकी लगन निष्ठा एवं अथिक परिश्रम के फलस्वरूप यह नया तकनीकी ज्ञान शीघ्र ही कृषकों के खेत पर पहुँचाया जा सका।

निर्देश

1. इण्डि० कौंसिल० एग्री० रिसर्च, **सॉयल टेस्ट० इन इण्डिया,** 1967, 38-51
2. रसेल, ई० वाल्टर, Soil Condition and Plant growth, 1961, 282-284
3. एग्राल, आई० पी० तथा डरगन के० एस०, **इण्डि० फार्मि०, जुलाई** 1974

4. एब्राल, आई० पी०, गौल बी० एल० तथा आचार्या, सी० एल०, **इण्डि० फार्मि०, जुलाई,** 1975

5. डरगन, के० एस०, तथा अन्य **इण्डि० फार्मि०, मई,** 1973

6. एब्रोल, आई० पी०, **फर्टि० न्यूज**, 1974, 19 (12)

7. मेहता, के० के० तथा एब्राल, आई० पी०, **इण्डि० फार्मि०, अप्रैल,** 1975

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages 357-361

ग्लायकोलिक अम्ल द्वारा निर्मित नीले परक्रोमेट के अपघटन उत्पाद का अध्ययन

बी० एम० एल० तिवारी तथा बी० एस० राजपूत
रसायन विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रींवा

तथा

आर० सी० राय
सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—जनवरी 31, 1977]

सारांश

ग्लायकोलिक अम्ल से निर्मित नीले परक्रोमेट के अपघटन उत्पाद का अध्ययन सामान्य विश्लेषण, क्रोमैटोग्रेफी, वर्णमिति, अवरक्त स्पेक्ट्रम एवं चुंबकीय प्रवृत्ति मापन द्वारा किया गया। इससे ज्ञात हुआ कि उत्पाद ऐसा यौगिक है जिसके धनायनिक एवं ऋणायनिक भागों में क्रोमियम उपस्थित है तथा धनायनिक क्रोमियम के साथ ग्लायकोलेट आयन सहसंयोजित है। यौगिक क्रोमियम की मिश्रित ऑक्सीकरण अवस्थाओं का उदाहरण प्रतीत होता है।

Abstract

A study of the decomposition product of the blue perchromate prepared in presence of glycolic acid. *By* B. M. L. Tiwari and B. S. Rajput, Chemical Laboratories, Government Science College, Rewa and R. C. Rai, University of Sagar, Sagar.

The decomposition product of the blue perchromate prepared with glycolic acid has been investigated by normal analysis, chromatography, colorimetry, IR spectra and magnetic susceptibility measurements. It suggests the product to be a compound having chromium in its acidic as well as in basic part and glycolate ion being coordinated with the basic chromium. The compound appears to be an example of mixed oxidation states of chromium.

विभिन्न कार्बनिक एवं अकार्बनिक अम्लों द्वारा निर्मित नीले परक्रोमेटों के अपघटन उत्पादों का अध्ययन कई शोधकर्ताओं ने प्रस्तुत किया है।[1-7] प्रस्तुत प्रपत्र में ग्लायकोलिक अम्ल द्वारा निर्मित नीले परक्रोमेट के अपघटन उत्पाद का विस्तृत अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। साथ ही इस उत्पाद का सामान्य संरचना सूत्र भी प्रस्तावित है।

प्रयोगात्मक

सभी प्रयुक्त रसायन वैश्लेषिक कोटि के थे तथा ईथर को पराक्साइड मुक्त कर लिया गया था। समस्त विलयनों को प्रयोग करने के पूर्व ठंडा कर लिया गया था।

नीला परक्रोमेट बनाने के लिए (5%) पोटैशियम डाइक्रोमेट (25 मिली०), N ग्लायकोलिक अम्ल (25 मिली०), ईथर (120 मिली०) तथा 20 आयतन वाले हाइड्रोजन पराक्साइड (5 मिली०) को मिलाया गया। नीली ईथरीय तह को अलग कर उसे हिमशीतल जल से कई बार धोया गया जिससे अशुद्धियां दूर हो जायँ। अन्त में उसे हिमशीतित्र में 2-3 घंटे रखा गया जिससे ईथर में मिला जल जमकर अलग हो जाए। प्राप्त नीले परक्रोमेट को एक शुष्क बीकर में अपघटित होने के लिए रख दिया गया। लगभग दो दिनों बाद भूरा-काला चिपचिपा पदार्थ प्राप्त हुआ जिसे ईथर से कई बार धोकर 40°C पर सुखाने से काले रंग का अक्रिस्टलीय पदार्थ मिला।

विश्लेषण : उपर्युक्त अपघटन उत्पाद की निश्चित मात्रा को N NaOH में विलेय कर विलयन को जल ऊष्मक पर गर्म करने से धनायनिक क्रोमियम $Cr(OH)_3$ के रूप में अवक्षेपित हो गया। इसे Cr_2O_3 के रूप में आकलित किया गया।[8] पीले रंग के छनित का 4 M HCl एवं एथिल ऐल्कोहल द्वारा अपचयन कर ऋणायनिक क्रोमियम का आकलन Cr_2O_3 के रूप में किया गया। कार्बन तथा हाइड्रोजन का आकलन दहन विधि से किन्तु ऑक्सीजन का आकलन अंतर विधि द्वारा किया गया। प्राप्त परिणामों को सारणी 1 में दर्शाया गया है।

सारणी 1

तत्वों की प्रतिशत मात्रा

धनायनिक Cr	ऋणायनिक Cr	C	H	O
25·87	12·82	6·44	3·46	51·41
25·89	12·86	7·18	3·51	50·56
25·88	12·92	6·65	2·58	51·97

क्रोमैटोग्रेफिक तथा वर्णमितीय अध्ययन : अपघटन उत्पाद की निश्चित मात्रा का कुछ बूंद तनु सलफ्यूरिक अम्ल की सहायता से जलीय विलयन बनाकर, डावेक्स-50 (Na) तथा ऐम्बरलाइट-120 (Na) रेजिन द्वारा विनिमय किया गया। धनायनिक क्रोमियम का निक्षालन (इल्यूशन) 10% सोडियम क्लोराइड विलयन द्वारा किया गया। प्राप्त निक्षालन द्रव (इल्यूएट) नीले-बैंगनी रंग का किन्तु छनित (इफ़्ल्यूएन्ट) पीले रंग का था। इनमें क्रमश: धनायनिक एवं ऋणायनिक क्रोमियम की संयोज्य अवस्थाओं का निश्चयन क्रोमैटोग्रेफिक विधि द्वारा किया गया।[10-11] तुलना के लिए क्रोमिक सल्फेट, क्रोमिक क्लोराइड, पोटैशियम क्रोमेट तथा डाइक्रोमेट विलयनों के भी R_f मान निकाले गए। यह पाया गया कि इल्यूएट अर्थात् धनायनिक क्रोमियम के R_f मान (0·63-0·635) क्रोमिक सल्फेट तथा क्लोराइड के समान थे जबकि इफल्यूएन्ट अर्थात् ऋणायनिक क्रोमियम के मान (0.304-0·310) पोटैशियम क्रोमेट जैसे थे।

इल्यूएट को सोडियम हाइड्रॉक्साइड द्वारा क्षारीय बनाकर 100 आयतन हाइड्रोजन पराक्साइड से ऑक्सीकृत किया और बॉश एवं लॉम्ब स्पेक्ट्रानिक-20 वर्णमापी की सहायता से उसका प्राकाशिक घनत्व (0·52-0·56) ज्ञात कर लिया। इफल्यूएन्ट का प्राकाशिक घनत्व पहले अनॉक्सीकृत अवस्था में (0·25-0.27) और फिर इल्यूएट की तरह ऑक्सीकृत अवस्था में (0·25-0·28) ज्ञात किया गया। इस मापन से यह स्पष्ट हो गया कि धनायनिक एवं ऋणायनिक क्रोमियम का अनुपात 2:1 का है तथा उत्पाद के ऋणायनिक भाग में केवल Cr(VI) उपस्थित है।

पोटैशियम आयोडाइड से क्रिया : इल्यूएट जलीय पोटैशियम आयोडाइड से केवल ऑक्सीकृत अवस्था में ही आयोडीन विस्थापित करता है जबकि इफल्यूएन्ट द्वारा ऑक्सीकृत अवस्था के साथ-साथ अनॉक्सीकृत अवस्था में भी आयोडीन विस्थापित होता है। आयोडोमिति पद्धति से अनुमापन करने पर इल्यूएट (ऑक्सीकृत) तथा इफल्यूएन्ट (अनॉक्सीकृत एवं ऑक्सीकृत) के लिए जो अनुमाप-मान प्राप्त होते हैं उनका अनुपात 2:1 का पाया गया है।

अवरक्त स्पेक्ट्रम : अपघटन उत्पाद का अवरक्त स्पेट्रम KBr डिस्क विधि से पार्किन-एल्मर, मॉडल 237, स्पेक्ट्रममापी द्वारा प्राप्त किया गया। प्रमुख अवरक्त बैंड निम्नलिखित आवृतियों (Cm^{-1}) पर पाए गए :—

3600-2890 (broad maxima with hump), 1625-1575 (S. doublet with shoulders), 1425 (S), 1390 (shoulder), 1255 (S), 950-928 (W. doublet), 790 (M).

चुंबकीय प्रवृत्ति मापन : यह 25°C पर गोये की विधि द्वारा किया गया तथा अपघटन उत्पाद के प्रति ग्राम चुंम्बकीय प्रवृत्ति का मान $+23{\cdot}6\times10^{-6}$/ ग्राम पाया गया।

विवेचना

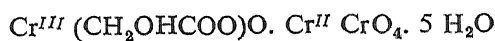
सारणी 1 के आँकड़ों, क्रोमैटोग्रैफिक वर्णमितीय अध्ययन तथा जलीय पोटैशियम आयोडाइड से अपघटन उत्पाद की क्रिया से यह स्पष्ट हो जाता है कि उत्पाद के धनायनिक भाग में Cr (III)/Cr (II) किन्तु ऋणायनिक भाग में Cr (VI) उपस्थित है और धनायनिक एवं ऋणायनिक क्रोमियम का अनुपात

2:1 का है। अपघटन उत्पाद के धनायनिक भाग में Cr (VI) के कम संयोज्य अवस्था में क्रोमियम उपस्थित होने की पुष्टि उत्पाद के चुंबकीय प्रवृत्ति से भी हो जाती है। चुंबकीय प्रवृत्ति का धनात्मक मान उत्पाद के अनुचुंबकीय होने को प्रमाणित करता है।

उपर्युक्त अध्ययनों के आधार पर अपघटन उत्पाद का मूलानुपाती सूत्र $C^{B}r_2$. $C^{A}r$. C_2. H_{13}. O_{13} हो सकता है जिसमें B एवं A का अर्थ क्रमशः धनायनिक तथा ऋणायनिक क्रोमियम से लिया जाना चाहिये।

उपलब्ध साहित्य [12–18] के अनुसार अपघटन उत्पाद का अवरक्त स्पेक्ट्रम उत्पाद में जालक जल (3600-2890 Cm^{-1}), COO– समूह के असममित एवं सममित तनन बैंड (1625-1575, 1425 तथा 1390 cm^{-1}), ऐल्कोहलिक हाइड्रॉक्सिल समूह (1255 cm^{-1}) तथा धातु-ऑक्सीजन बंध के साथ-साथ CrO_4^{2-} आयन (950-928 एवं 790 cm^{-1}) की उपस्थित का संकेत देता है। इससे स्पष्ट है कि उत्पाद के धनायनिक क्रोमियम के साथ ग्लायकोलेट आयन जुड़ा हुआ है। कार्बन, हाइड्रोजन तथा ऑक्सीजन की प्रतिशत मात्रा (सारणी 1) से पता चलता है किग्लायकोलेट आयन की संख्या केवल एक ही हो सकती है।

इन समस्त तथ्यों के आधार पर अपघटन उत्पाद का सामान्य प्रस्तावित अणुसूत्र निम्न प्रकार का हो सकता है :—

$$Cr^{III}(CH_2OHCOO)O.\ Cr^{II}\ CrO_4.\ 5\ H_2O$$

इस अणु सूत्र एवं प्राप्त चुंबकीय प्रवृत्ति से बोर मैग्नेटान का मान 4·765 BM आता है। यह मान Cr (II) यौगिकों के मान से मिलता-जुलता है। इस सूत्र के आधार पर यौगिक क्रोमियम की मिश्रित ऑक्सीकरण अवस्थाओं का उदाहरण प्रतीत होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक अवरक्त स्पेक्ट्रा तथा चुंबकीय प्रवृत्ति मापन हेतु सुविधा प्रदान करने के लिए डा० एम० डी० कारखानावाला, अध्यक्ष, रसायन शास्त्र डिवीजन, भाभा परमाणु अनुसंधान केन्द्र, ट्रांबे के आभारी हैं।

निर्देश

1. राजपूत, बी० एस० तथा राय, आर० सी०, बुले० केमि० सोसा० जापान, 1965, **38**, 2052.
2. राजपूत, बी० एस० तथा राय, आर० सी०, जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०, 1965, **42**, 277.
3. सिंह, एस०, पी-एच० डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, 1966.
4. राय, एस० एस०, पी-एच० डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, 1967.
5. अवस्थी, एस० के०, पी-एच० डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, 1968.

6. **चौहान, ए० के०, पी-एच० डी० थीसिस,** रविशंकर विश्वविद्यालय रायपुर, 1973.

7. उपाध्याय, बी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1969, **12**, 31-33.

8. वोगल, ए० आई०, "A Text book, of Quantitative Inorganic analysis" लांगमैन्स, 1961, पृष्ठ 520.

9. सैम्यूलसन, ओ०, "Ion Exchangers in Anlaytical Chemistry", जान विली एन्ड सन्स, 1954.

10. पोलार्ड, एफ० एच०, मैकोमी, जे० एफ० डब्ल्यू० तथा एल्बाइन, आई० आई० एम०, **नेचर**, 1949, **163**, 292.

11. लेडरर, ई० तथा लेडरर, एम०, "Chromatography", एल्सेवियर, 1957, 482-485

12. मिलर, एफ० ए० तथा विलकिन्स, सी० एच०, **एनाल केम०**, 1962, **24**, 1253.

13. एरलिच, जी० **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1954, **76**, 5263.

14. डोविले, एफ०, डुवाल, सी० तथा लेकाम्टे जे०, **काम्पट० रेन्ड० साइं०**, 1941, **212**,953.

15. नेकमोटो, के०, यूजीटा, जे० आदि, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1957, **79**, 4904.

16. श्मेल्ज , एम० जे०, आदि, **स्पेक्ट्रोकिम० ऐक्टा०**, 1957, **9**, 51.

17. चटर्जी, बी०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1971, **48**, 929.

18. राव, सी० एन० आर०, "Chemical Applications of Infrared Spectroscopy", एकेडमिक प्रेस, 1963.

19. डे, एम० सी० तथा सेल्विन, जे०, "Theoretical Inorganic chemistry", ईस्ट-वेस्ट प्रेस, 1958, पृष्ठ 304.

20. लुईश, जे० तथा विलकिन्स, आर० जी०, "Modern Coordination Chemistry", इन्टर-साइन्स, 1960, पृष्ठ 406.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October 1977, Pages 363-367

विभिन्न समयों तक रखे गये दाल तथा तेलवाली फसलों के बीजों से पृथक किये गये कवक

दीनानाथ शुक्ल तथा सोमेश्वर नाथ भार्गव
वनस्पति विज्ञान विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अक्टूबर 18, 1976]

सारांश

इलाहाबाद व इसके निकटतम बाजारों से **फैसियोलस मुंगो, फैसियोलस आरिअस, केजानस केजान, साइसर एराईटिनम, लाइनम यूसीटेटीसिमम, सिसेमम इन्डीकम, ब्रैसिका नाइग्रा** तथा **रिसीनस कम्यूनिस** के बीज इकट्ठे किये गये। बीजोढ कवकों को पृथक करने के लिये सोख्ता तथा अगार प्लेट विधियाँ काम में लायी गयीं। यह देखा गया कि विभिन्न स्थानों व समयों तक रखे गय कवकों की संख्या व प्रकारों में विभिन्नता थी। एक से ढाई वर्ष के बीच रखे गये बीजों से सर्वाधिक कवक पृथक किये गये।

Abstract

Fungi isolated from seeds of pulses and oil crops stored for different intervals of time. *By* D. N. Shukla and S. N. Bhargava, Department of Botany, University of Allahabad.

Seed samples of *Phaselus mungo*, *Phaselus aureus*, *Cajanus Cajan*, *Cicer arietinum*, *Linum Usitatissimum*, *Sesamum indicum*, *Brassica nigra* and *Ricinus Communis* were collected from local markets and nearby districts ajdacent to Allahabad. Blotter and agar plate procedures were used for detection of seed-borne and surface fungi. As evident from the results of present investigation, the variation in fungal flora was noticed with the same type of seeds collected from different places and stored for different intervals of time. Maximum fungal population was observed from one year upto two and half year stored seeds.

दाल तथा तेलवाली फसलें बीजोढ कवकों से भयंकर रूप से प्रभावित होती हैं। ये कवक बीजों में या तो खेतों से ही सम्पर्क में आ जाते हैं अथवा बीजों के भण्डारों में रखने पर उन पर अपना अस्तित्व

सारिणी 1

विभिन्न अवस्था तथा समयों में रखे गये बीजों से पृथक किये गये बीजोढ कवकों के नाम व प्रतिशत

फसल	पृथक किये गये बीजोढ कवकों के नाम									
	कच्चे बीज %	पके अर्ध सूखे बीज %	पके सूखे तथा सीधे फलियों से निकाले गये बीज %	6 महीने की अवधि तक रखे गये बीज %	एक वर्ष की अवधि तक रखे गये बीज %	डेढ़ वर्ष की अवधि तक रखे गये बीज %	$2\frac{1}{2}$ वर्ष की अवधि तक रखे गये बीज %	2 वर्ष की अवधि तक रखे गये बीज %	3 वर्ष की अवधि तक रखे गये बीज %	3 वर्ष से अधिक की अवधि में रखे गये बीज %
उर्द (**फैसियोलस मुंगो** एल०)			फ1(3) क1(1) म०(1)	फ1 (1) क1 (3) म० (1)	फ1 (5) क1 (3) म० (1)	फ1 (5) क1 (2) म० (4)	फ1 (10) फ6 (1) म० (2)	फ1 (10) फ1 (2) म० (3)	फ1 (7) म० (6)	फ1 (6)
मुंग (**फैसियोलस आरुयस** राक्सब०)			फ1 (2) क1 (2) क2 (1) म० (2)	फ1 (2) क1 (2) क2 (3) म० (2)	फ1 (3) क1 (2) क2 (3) म० (2)	फ1 (5) क1 (2) क2 (5) म० (4)	फ1 (5) क1 (4) क2 (1) म० (6)	फ1 (8) म1 (3)	न	न
अरहर (**केजानस केजान** मिलसप)		फ6 (1)	फ6 (3)	फ6 (3) ए3 (2)	फ6 (3) फ7 (1) ए3 (2)	फ6 (5) फ7 (2) ए3 (4)	फ7 (2) ए1 (4) ए2 (7)	फ7 (2) ए1 (4) ए2 (3) ए3 (1)	ए3 (9)	न
चना (**साइसर एराइटिनम** एल०)	फ1 (2)	फ1 (4)	फ1 (6) अ1 (1)	फ1 (6) अ1 (3)	फ1 (4) फ6 (3) अ1 (2)	फ1 (6) फ6 (1) अ1 (3) ए1 (1)	फ1 (6) फ6 (1) ए1 (3)	फ1 (2) फ6 (2) ए1 (6)	ए1 (8)	ए1 (4)

मटर (पाइजम सटाइबम एल०)		फ6 (1)	फ6 (5)	फ6 (5) अ1 (2)	फ6 (6) अ1 (1) ए1 (3)	फ6 (3) ए1 (2) ए2 (6)	फ6 (5) ए1 (2) ए2 (6)	ए1 (3) ए2 (1) ए3 (6)	ए1 (7) ए2 (3) ए3 (5)
अलसी (लाइनम यूसीटेटिसमम एल०)		फ4 (3) फ2 (1)	फ4 (3) फ2 (3)	फ4 (5) फ2 (3) अ1 (2)	फ4 (5) फ2 (5) अ1 (3)	फ4 (7) क2 (2) ए1 (5)	फ2 (4) ए1 (7)	न	न
तिल (सिसेमम इन्डीकम एल०)		फ6 (5) म० (2)	फ6 (5) फ०1 (3) म० (3)	फ1 (2) फ6 (5) म० (4)	फ1 (6) फ6 (2) म० (4)	फ1 (6) फ6 (2) म० (1)	फ1 (8) फ6 (3)	फ1 (5)	फ1 (3)
काली सरसों (बैसिका नाइगा कोच०)			की1 (1) फ6 (2)	की1 (1) फ6 (3)	की1 (3) फ6 (4) अ1 (1)	की1 (5) फ5 (2) फ6 (1) अ1 (3)	की1 (4) फ5 (6) फ6 (2)	की1 (1) फ6 (7)	फ6 (2)
रेड़ी रिसीनस कम्यनिस एल०)	फ5 (2)	फा0 (1) की1 (3) फ5 (2)	की1 (1) की2 (1) फ5 (4) ए2 (2)	की1 (2) की2 (2) फ5 (3) ए2 (3)	की2 (5) फ5 (4) ए2 (3)	की2 (5) फ5 (4) ए1 (5) ए2 (2)	की2 (3) फ5 (6) ए1 (2) ए2 (6)	की2 (1) फ5 (8) ए1 (2) ए2 (1)	न

एस्परजिलस नाइगर वान टाइघेम (ए1), **एस्परजिलस फ्लेबस** लिंक (ए2), **एस्परजिलस टेरिअस** थाम (ए3)

अल्टरनेरिया अल्टरनाटा (फर०) केइस्लर (अ), **कर्बुलेरिया वरकुलोसा** टन्डन एवम् बिलग्रामी (क1) **कर्बुलेरिया ल्युनाटा** (वाकर) वौयडजिन (क2),

कीटोमियम ग्लोबोसम कुन्जे इक्स एफ० आर० (की1) **कीटोमियम अरकुयेटम** राय एवम् तिवारी (की2),

राइजोपस एरटिजस फिसर (ए1), **राइजोपस स्टोलोनीफर** (इरेम्ब इक्स एफ आर०) लिन्द (ए2), **फ्युजेरियम सोलानी** (मार्ट०) सैक, (फ1), **फ्यूजेरियम आक्सीस्पोरम** स्कल० इक्स एफ आर० (फ2), **फ्यूजेरियम मोनिलीफोरमी** शेल्ड (फ3)

फ्यूजेरिम इक्वीसेटाई (कार्डा) (फ4), **फ्यूजेरिम सेमीटेक्टम** वर्क एवम् राव (फ5), **फ्युजेरियम** सप० (फ6), **फ्यूजेरियम** सप (फ7)।

मैक्रोफोमिना फैसियोलिना (तासी) ग्वाइड, (म०), **फाइलोस्टिकटा** सप० (फा०) बीजों पर परीक्षण नहीं किया गया (न)

बना लेते हैं। तरह तरह के बीजों में भी उनकी संख्या असमान होती हैं। बीजोढ कवकों की यह विभिन्नता, बीजों के भौतिक व रासायनिक गुणों, कृषि की विधियों, बीजों को रखे जाने वाले स्थान व वहाँ की जलवायु सम्बन्धी विशेषताओं के कारण होती हैं। ताजे बीजों व कुछ समय तक रखे गये बीजों के बीजोढ कवकों में भी असमानता पाई जाती है। हमारे देश में मिश्रा और कनाउजिया [1] ने तेल वाली फसलों के बीजों को लेकर उन पर पाये जाने वाले कवकों की विभिन्नता का उल्लेख किया है। प्रस्तुत शोध-प्रपत्र में दाल वाली तथा तेलवाली फसलों के बेजोढ कवकों की विभिन्नता पर प्रकाश डाला गया है।

प्रयोगात्मक

इलाहाबाद व इसके निकटतम बाजारों एवम् कृषकों से उर्द (**फैसियोलस मुंगो** एल०), मूंग (**फैसियोलस आरिअस** राक्स ब०), अरहर (**केजानस केजान** मिल-साप), चना (**साइसर एराईटिनम** एल०) मटर (**पाइसम सटाइवम** एल०), अलसी (**लाइनम यूसीटेटीसिमम** एल०), तिल (**सिसिमम इन्डीकम** एल०), काली सरसों (**ब्रैसिका नाइग्रा** कोच०), तथा रेंडी (**रिसीनस कम्यूनिस** एल०) के बीज इकट्ठे किये गये। कच्चे व अधपके बीजों को वनस्पति विज्ञान विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, प्रयाग के फार्म व गंगा व यमुना के तट के खेतों से इकट्ठा किया गया। बीजोढ कवकों को पृथक करने के लिये सोख्ता व अगार प्लेट विधियां काम में लाई गयीं। पेट्रीप्लेटें अंधेरे में 25±20 से० ताप पर 7 से 10 दिन तक रखी गयीं। अन्तबीजोढ कवकों को पृथक करने के लिये बीजों को 0·1 प्रतिशत मरक्यूरिक क्लोराइड के घोल में दो मिनट तक डाल कर उसके बाद जीवाणुहनित आसुत जल से भली भांति धोकर ही इन्क्यूबेट किया गया। पृथक किये गये कवकों को विशुद्ध संवर्ध प्रविधि से शुद्ध करके चोटे व आल-डेक्सट्रोस-अगार माध्यम पर उनके पुनः अध्ययन व परजीविता सिद्ध करने के लिए रखा गया।

परिणाम तथा विवेचना

सारिणी 1 में विभिन्न समयों तक रखे गये, दालवाली तथा तेलवाली फसलों के बीजों से पृथक किये गये बीजोढ कवकों के नाम व उनकी प्राप्ति का प्रतिशत दिया गया है। यह पाया गया कि कच्चे बीजों से कोई भी कवक पृथक नहीं किये जा सके। यह कमी सम्भवतः उसमें अधिक जल की मात्रा तथा भोज्य तत्वों के रासायनिक परिवर्तनों व उनकी कमी के कारण होती है। जैसे-जैसे बीजों के रखे जाने का समय बढ़ता है वैसे-वैसे उन पर पाये जाने वाले कवकों के प्रकारों एवं संख्या में भी वृद्धि होती जाती है। किन्तु यह वृद्धि एक निश्चित अवधि तक ही सीमित होती है। बीजों में पाये जाने वाले पोषक तत्वों तथा जल की कमी से बीजोढ कवक पूर्णतः प्रभावित होते हैं। यही कारण है कि एक वर्ष से लेकर 2·5 वर्ष तक की अवधि तक रखे गये बीजों में कवक अत्यधिक संख्या में पाये गये किन्तु 2·5 वर्ष के बाद उनके प्रकारों तथा संख्या में कमी होती गयी। तीन वर्ष की अवधि के बाद **एस्परजिलस** तथा **फ्यूजेरियम** कवकों की प्रजातियाँ ही पृथक की गयीं।

यह देखा गया कि थ्रेसर द्वारा मँड़ाई की गई फसलों के बीजों में कवकों द्वारा प्रभावित बीजों का प्रतिशत अधिक रहा। थ्रेसर द्वारा निकाले गये अधिकांश बीजों की वाह्य पर्तें प्रायः कट-पिट जाती हैं जिससे ये बीज पुनः बुआई के लिए बैलों द्वारा निकाले गये बीजों की अपेक्षा उत्तम नहीं होते हैं। खुले

स्थानों में रखे गये बीजों से कवक अधिक संख्या में पृथक किये गये क्योंकि ये बीज खुली हवा के सम्पर्क में रहने से वातावरण की नमी तथा कवक-बीजाणुओं से प्रभावित होते रहते हैं। मिट्टी के कच्चे बर्तन (जिन्हें कोठिला कहते हैं) में कीड़े कम किन्तु कवक अधिक पाये गये जबकि खत्ती (भूमि के अन्दर बना गढ्ढा) में कीड़ों की संख्या अधिक किन्तु कवक नाम मात्र को पाये गये। बोरों में भर कर जो बीज भूसे (गेहूं तथा जौ का भूसा) में रखे गये थे उन बीजों में कवकों तथा कीड़ों की संख्या अल्पतम पायी गयी। टिन के बड़े बर्तनों में रखे गये बीजों में कवकों द्वारा प्रभावित बीजों का प्रतिशत सबसे कम रहा जब कि खुली फर्श पर रखे गये बीजों में कवकों द्वारा प्रभावित बीजों का प्रतिशत सर्वोपरि रहा। दालों में भी कवकों का संक्रमित प्रतिशत अत्यन्त कम रहा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डा० जोन्सन, निदेशक, कामनवेल्थ माइकोंलोजिकल इन्स्टीट्यूट क्यू, यू० के० को विभिन्न प्रकार के बीजोढ कवकों को पहचानने के लिए तथा वनस्पति विज्ञान विभाग, इलाहाबाद विश्व-विद्यालय के अध्यक्ष प्रो० डी० डी० पन्त के कृतज्ञ हैं जिन्होंने शोध कार्य की उचित सुविधाएँ प्रदान कीं। प्रथम लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का आर्थिक सहायता प्रदान करने के लिए चिर आभारी हैं।

निर्देश

1. मिश्रा, आर० आर० तथा कनौजिया, आर० एस०, **इण्डियन फाइटोपैथोलोजी,** 1973, **26,** 284-294

Vijnana Parihsad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages, 369-371

अर्द्ध मरुस्थली भाग के कुछ पौधों के पुष्प वर्णकों का वर्णलेखी अध्ययन-II

प्रेम शंकर त्रिपाठी, सुरेश चन्द्र आमेटा तथा महेन्द्र पाल सिंह राणावत
से० म० बि० राजकीय महाविद्यालय, नाथद्वारा

[प्राप्त—जनवरी 22, 1977]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में कुछ नवीन पुष्प वर्णकों का उल्लेख है जिन्हें अर्द्ध मरुस्थली भाग के पौधों के बैंगनी पुष्पों से पृथक् करके वर्णलेखी विधि से पहचाना गया।

Abstract

Chromatographic studies of floral pigments in some semi-arid zone plants-II. *By* P. S. Tripathi, Suresh Chandra Ameta and M. P. S. Ranawat, S. M. B. Government College, Nathdwara.

The present study reveals a few new floral pigments which were separated chromatographically from violet flowers of some semi-arid zone plants.

यह उल्लेख मिलता है कि पुष्प वर्णक फ्लोरोक्रोम [1, 2] है। अभी तक अर्द्ध-मरुस्थली पौधों के पुष्प वर्णकों का ठीक से अध्ययन नहीं हुआ है। पुरोहित तथा आमेटा [6] ने कुछ पौधों पर कार्य किया है। प्रस्तुत अध्ययन इसी क्रम में किया गया है। इस कार्य हेतु कुछ बैंगनी पुष्पकों वाले पौधों को ही चना गया।

प्रयोगात्मक

अर्द्ध मरुस्थली भाग के बैंगनी पुष्पों वाले पौधों के पुष्प अंगों को एकत्र करके उन्हें 25 मिली० मेथेनॉल से निष्कर्षित किया गया, जिसमें 1% HCl मिला था। पुष्प के अंगों को निष्कर्षक के सम्पर्क में 18 घंटे रखने के बाद छान लिया गया। छनित को सान्द्रित करके वर्णकों को वर्णलेखन के लिये व्हाटमैन नं० 1 पत्र में बिन्दु अंकित किया गया। इसके लिये *n*-ब्युटेनॉल, ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल तथा जल को 4:1:5 के अनुपात में रखा गया। [4] पृथक्कृत पुष्प वर्णकों के वर्णलेखों को अमोनिया वाष्प, NaOH, 1%

HCl से उपचारित किया गया और विभिन्न जाति के पौधों की रंग आभाओं (शेडों) को दिन के प्रकाश में देखा गया।[5] उपचारित तथा अनुपाचारित वर्णलेखों की रंग आभाओं के R_f मान सारणी 1 में अंकित हैं।

सारणी 1

अर्द्धमरुस्थली प्रदेशों के पौधों से पृथक्कृत पुष्पवर्णकों के R_f मान तथा रंग आभायें

पौधे की जाति	मान	रंग आभायें (अनुपचारित)	रंग आभायें (उपचार के बाद) अमोनिया वाष्प
स्परगुला आर्वेन्सिस	0·48	हल्का पीला	हल्का हरा, पीत
सोलेनम सुरटैन्स	0·11	बैंगनी	नीला, पीत, गुलाबी
,,	0·40	हल्का पीला	हल्का हरा पीत
,,	0·62	गहरा पीला	गहरा पीत, पीत, हल्का पीत
जैकेरेन्डा माइमोसीफोलिया	0·06	हल्का पीला	हरा पीत
,,	0·26	बैंगनी	नीला पीत गुलाबी
,,	0·42	पीला	पीत पीत

विवेचना

स्परगुला आर्वेन्सिस में केवल एक वर्णक पाया गया, जिसका R_f मान 0·48 है। यह हल्का पीला होता है, जो अमोनिया वाष्प से उपचारित होने पर हल्का हरा रंग देता है। जो पीला धब्बा अमोनिया वाष्प के उपचार पर भी पीला रहा (R_f=0·42 जे० माइमोसीफोलिया में) वह उसमें फ्लेवोनाल की उपस्थिति बताता है। जिन धब्बों का रंग अमोनिया वाष्प से उपचारित करने पर नीला तथा 1% HCl से उपचारित करने पर गुलाबी हो गया, वह उनमें ऐंथोसायनिन की उपस्थिति का सूचक है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, प्रो० विनय शर्मा के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने इस कार्य में अपने परामर्श से सहायता पहुंचाई।

निर्देश

1. रामन, सी० वी०, **करेंट साइंस**, 1969, **38**, 179
2. वही, **वही**, 1969, **38**, 451

3. सेन, डी एन०, **फोलियाजेयोबाट फाइटोटेक्सा**, 1968, **3**, 1

4. शर्मा, के० डी० तथा सेन, डी० एन०, **करेंट साइंस**, 1969, **38**, 394

5. स्टाहल, ई० तथा शूर्स, पी० जे०, Thin Layer Chromatography, 1965, पृ० 380

6. पुरोहित, श्या० सु० तथा आमेटा, सु० च०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1973, **16**(**2**), 119

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages, 373-376

तैले-तैलम् पायसों का प्रावस्था व्युत्क्रमण

महेश कुमार शर्मा
यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून

[प्राप्त—अप्रैल 27, 1977]

सारांश

तैले-तैलम् पायसों (निर्जल पायस) को मोनोक्लोरोबेंजीन और एथिलीन ग्लाइकोल—दो निर्जल प्रावस्थाओं और ट्वीन 80, ट्वीन 20, स्पैन 80 तथा 60 पायसीकारकों द्वारा निर्मित किया गया है। इन पायसों के प्रावस्था व्युत्क्रमण पर परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन और पायसीकारक सान्द्रण के प्रभाव का अध्ययन किया गया है। यह पाया गया है कि किसी पायस की व्युत्क्रमण सान्द्रता केवल सापेक्ष प्रावस्था सान्द्रताओं पर ही निर्भर नहीं करती वरन् पायसीकारक की सान्द्रता और स्वरूप भी उस पर अपना प्रभाव डालते हैं।

Abstract

Phase inversion of oil-in-oil emulsions. *By* Mahesh Kumar Sharma, Instruments Research and Development Establishment, Dehradoon.

The influence of dispersed phase volume and emulsifer concentration on the phase inversion of oil-in-oil emulsions (nonaqueous systems) prepared with monochlorobenzene and ethylene glycol as two nonaqueous phases and Tween 80, Tween 20, Span 80 and Span 60 as emulsifying agents has been studied. It has been observed that the inversion concentration of an emulsion is a function not only of the relative phase concentration but also of the concentration and nature of the emulsifier.

एक पूर्व प्रपत्र [1] में यह दर्शाया गया है कि समान्य जले-तैलम् (oil-in-water) और तैले-जलम् (water-in-oil) पायसों के अतिरिक्त एक नये तीसरे प्रकार के तैले-तैलम् (oil-in-oil) पायस भी बनाये जा सकते हैं। इन नये तैले-तैलम् पायसों (निर्जल पायस) में दो निर्जल अमिश्रणीय द्रव, आन्तरिक और बाह्य प्रावस्थाओं के रूप में और पृष्ठ सक्रियक पायसीकारक के रूप में होते हैं।

पायसों का प्रावस्था व्युत्क्रमण [2] अर्थात् प्रावस्थाओं का आकस्मिक व्युत्क्रमण जिससे जले-तैलम् पायस का तैले-जलम् पायस में और तैले-जलम् पायस का जले-तैलम् पायस में परिवर्तन हो जाता है, अत्यन्त महत्वपूर्ण प्रक्रम है, क्योंकि अनेक व्यावसायिक पायसों के निर्माण में पहले प्रारंभिक रूप में "प्रतिलोम" प्रकार के पायस तैयार किये जाते हैं जिनका वांछनीय प्रकार के पायस में व्युत्क्रमण उस प्रावस्था को मिलाकर किया जाता है जो अंत में बाह्य प्रावस्था होती है। यह प्रायः देखा गया है कि पायसों का निर्माण इस विधि से करने पर अल्पतम विलोड़न से ही अधिक स्थायी पायस बन जाते हैं जिनमें पायस के औसत बिन्दुक आकार लघुतर होते हैं। पायसों के व्युत्क्रमण की परिघटना से पायसों के स्थायित्व की दशाओं के विषय में भी महत्वपूर्ण जानकारी प्राप्त होती है।

निर्जल पायसों के पिछले कार्यों के क्रम में [3–6] प्रस्तुत अन्वेषण में तैले-तैलम् पायसों के प्रावस्था व्युत्क्रमण (अर्थात् O_1/O_2 पायस का O_2/O_1 पायस में आकस्मिक परिवर्तन और विलोमतः) पर परिक्षिप्त प्रावस्था आयतन तथा पायसीकारक सान्द्रता के प्रभाव का वर्णन किया गया है।

प्रयोगात्मक

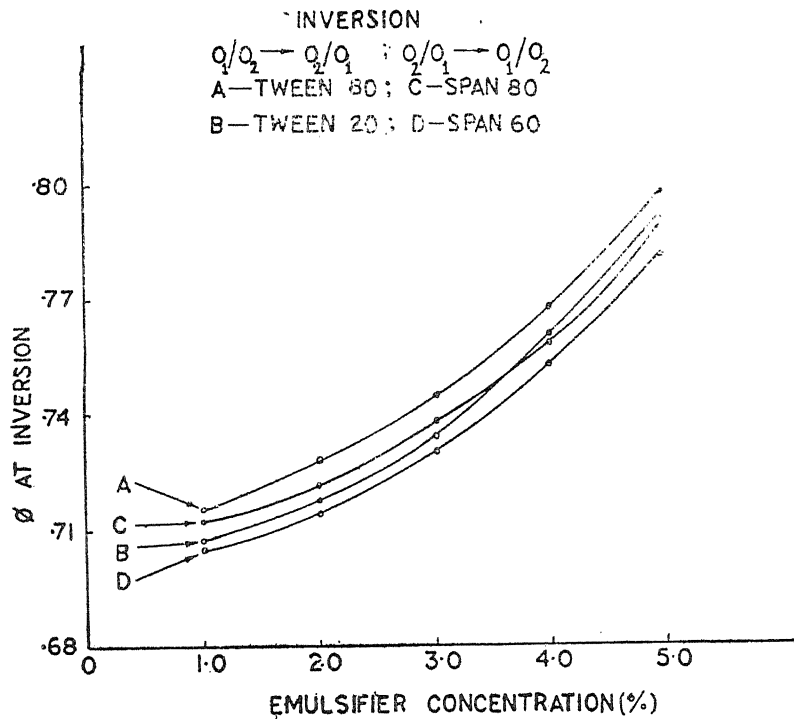
तैले-तैलम् पायसों की निर्मिति में मोनोक्लोरोबेंजीन (O_1; बी डी एच) और एथिलीन ग्लाइकोल (O_2; बी डी एच) दो निर्जल प्रावस्थाओं के रूप में उपयोग किये गये और इन पायसों का स्थायीकरण पॉलिऑक्सीएथिलीन सॉर्बिटन मोनोओलिएट (ट्वीन 80; के एल), पॉलिऑक्सीएथिलीन सॉर्बिटन मोनोलॉरेट (ट्वीन 20; के एल), सॉर्बिटन मोनोओलिएट (स्पैन 80; ए आई पी) तथा सार्बिटन मोनो-स्टिएरेट (स्पैन 60; ए आई पी) पायसीकारकों द्वारा किया गया। प्रत्येक पायसीकारक की सान्द्रता को 1·0 और 5·0% (पायस का W/V%) के मध्य में परिवर्तित किया गया। पायसीकरण से पहले, पायसीकारक को दोनों निर्जल प्रावस्थाओं में एक ज्ञात प्रतिशत सान्द्रता पर घोला या परिक्षेपित किया गया ताकि सम्पूर्ण पायसीकारक सान्द्रता, प्रावस्था व्युत्क्रमण के पूर्ण प्रयोग में स्थिर रहे।

O_1/O_2 से O_2/O_1 पायस के व्युत्क्रमण के अध्ययन में मोनोक्लोरोबेंजीन प्रावस्था को एथिलीन ग्लाइकोल प्रावस्था की एक ज्ञात मात्रा में धीरे-धीरे पदों में मिलाया गया और मिश्रण को भली-भांति हिलाया गया। इस प्रकार से प्रारम्भ में O_1/O_2 पायस निर्मित हुआ। मोनोक्लोरोबेंजीन प्रावस्था की एक निश्चित मात्रा मिलाने के पश्चात्, मोनोक्लोरोबेंजीन, एथिलीन ग्लाइकोल और अनायनिक पृष्ठ सक्रियक के विषमांगी मिश्रण का ब्रॉन इमल्सेटर की सहायता से पायसीकरण किया गया। मोनोक्लोरोबेंजीन प्रावस्था को पदों में तब तक डाला गया और मिश्रण का पायसीकरण किया गया जब तक कि O_1/O_2 पायस का O_2/O_1 पायस में व्युत्क्रमण नहीं हो गया। O_2/O_1 पायस का व्युत्क्रमण प्रतिलोम विधि द्वारा किया गया।

व्युत्क्रमण के लिये आवश्यक प्रावस्था का सान्द्रण अर्थात् पायस प्ररूप, रंजक विलेयता विधि [7] द्वारा ज्ञात किया गया। ऐनोडल डीप ब्लैक डबल्यू ए एम (एथिलीन ग्लाइकोल में घुलनशील तथा मोनो-क्लोरोबेंजीन में अघुलनशील) और फास्ट ब्लू बी बी बेस (मोनोक्लोरोबेंजीन में घुलनशील तथा एथिलीन

ग्लाइकोल में अघुलनशील) रंजकों को प्रत्येक पायस के दो भिन्न भिन्न भागों में मिलाया गया और मिश्रण को धीरे से हिलाया गया। यह पाया गया कि यदि सम्पूर्ण पायस में रंजक का रंग फैल गया तो वह प्रावस्था जिसमें रंजक घुलनशील था, संतत थी और यदि पायस में रंग असंतत रूप में दिखाई दिया तो प्रावस्था परिक्षिप्त थी।

परिणाम तथा विवेचना

चित्र-1 (ए, बी) में O_1/O_2 से O_2/O_1 पायसों के व्युत्क्रमण के लिये, व्युत्क्रमण प्रावस्था सान्द्रता पर पायसीकारक सान्द्रता का प्रभाव दर्शाया गया है। दो पृष्ठ सक्रियक (ट्वीन 80 तथा ट्वीन 20) के आंकड़े 1·0 से 5·0% तक पायसीकारक सान्द्रता पर दिये गये हैं। व्युत्क्रमण पर प्रावस्था सान्द्रण का मान मोनोक्लोरोबेंजीन प्रावस्था के आयतन प्रभाजों के रूप में दिया गया है। चित्र के वक्रों से यह देखा जा सकता है कि व्युत्क्रमण पर ϕ का मान, सक्रियक सान्द्रण की वृद्धि के साथ साथ बढ़ता है।

चित्र 1 तैले-तैलम् पायसों के व्युत्क्रमण प्रावस्था सांद्रण पर पायसीकारक सान्द्रता का प्रभाव

O_2/O_1 से O_1/O_2 पायसों के व्युत्क्रमण के लिये व्युत्क्रमण प्रावस्था सान्द्रण पर पायसीकारक सान्द्रता का प्रभाव भी चित्र-1 (सी, डी) में दिखाया गया है। यहाँ आंकड़े दो पृष्ठ सक्रियक (स्पैन 80

तथा स्पैन 60) की पायसीकारक सान्द्रता (1·0 से 5·0% तक) के विरुद्ध, एथिलीन ग्लाइकोल प्रावस्था के आयतन प्रभाजों के रूप में दिये गये हैं। यहाँ भी पायसीकारक सान्द्रता के बढ़ने पर, व्युत्क्रमण पर ϕ के मान में वृद्धि होती है।

इस प्रकार से तैले-तैलम् पायसों के प्रावस्था व्युत्क्रमण पर प्रस्तुत अन्वेषण यह दर्शाता है कि किसी पायस की व्युत्क्रमण सान्द्रता केवल सापेक्ष प्रावस्था सान्द्रताओं पर ही निर्भर नहीं करती है, परन्तु पायसीकारक की सान्द्रता और स्वरूप भी उस पर अपना प्रभाव डालते हैं।

निर्देश

1. शर्मा, एम० के०, **जर्न० कोलॉइड इन्टरफेस साइन्स**, 1975, **53**, 340
2. बेकर, पी०, Emulsions: Theory and Practice, **राइनहोल्ड, द्वितीय संस्करण, न्यूयार्क**, 1965, पृष्ठ 155.
3. शर्मा, एम० के०, **करेन्ट साइन्स**, 1975, **44**, 770.
4. वही, 1977, **46**, 131.
5. वही, **कोलाइड जर्न० जर्न० पालिमर** (प्रेस में).
6. वही, **इण्डियन जर्न० केमि०** (प्रेस में).
7. हाउजर, ई० ए० तथा लिन, जे० ई०, Experiments in Colloid Chemistry, **मैक-ग्राहिल न्यूयार्क**, 1940, पृष्ठ 129.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages 377-383

कापर (II) तथा निकेल (II) के ग्लूटैमिक अम्ल तथा कुछ अन्य ऐमीनो अम्लों से निर्मित मिश्रित लिगैंडों के कीलेट

रमेश चन्द्र तिवारी, मुनेन्द्र कुमार सिंह तथा मनहरन नाथ श्रीवास्तव

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मई 4, 1977]

सारांश

कापर (II) तथा निकेल (II) के कुछ मिश्रित लिगैंडों के कीलेटों के निर्माण का अध्ययन विभवमापी द्वारा किया गया है जिनमें ग्लूटैमिक अम्ल का व्यवहार एक प्राथमिक लिगैंड के रूप में, तथा ग्लाइसीन, α-एलानिन, वैलीन अथवा ल्यूसीन का गौण लिगैंडों के रूप में किया गया है। मिश्रित कीलेटों के निर्माण के स्थिरांकों मान साधारणतः संगत सरल कीलेटों के K_2 मानों से कम हैं। इसके अतिरिक्त ये मिश्रित ग्लूटैमेट कीलेटों के संगत मिश्रित ऐस्पार्टेट कीलेटों से अपेक्षतया कुछ कम स्थायी हैं।

Abstract

Mixed ligand amino acid chelates of copper (II) and nickel (II) glutamates. *By* R. C. Tiwari, M. K. Singh and M. N. Srivastava, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

Potentiometric studies are described for the formation of the mixed ligand chelates of Cu(II) and Ni(II) with glutamic acid as a primary ligand, and glycine, α-alanine, valine or leucine as secondary ligands. The formation constants for the mixed chelates are generally less than the K_2 values of corresponding simple chelates. Further these mixed glutamate chelates are relatively slightly less stable than corresponding mixed aspartate chelates.

पूर्वप्रकाशित प्रपत्रों में [1, 2] श्रीवास्तव एवं उनके सहयोगियों ने कापर (II) तथा निकेल (II) के कुछ मिश्रित लिगैंडों के ऐसे कीलेटों का विभवमापी अध्ययन किया था, जिनमें प्राथमिक लिगैंड के रूप में ऐस्पार्टिक अम्ल का तथा ग्लाइसीन, एलानिन आदि कुछ एक कार्बोक्सिलीय ऐमीनों अम्लों का व्यवहार गौण लिगैंडों के रूप में किया गया था। प्रस्तुत प्रपत्र में ग्लूटैमिक अम्ल का प्राथमिक लिगैंड के रूप में

व्यवहार किया गया है, तथा इस प्रकार निर्मित मिश्रित लिगैंडों के कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांकों का परिकलन किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त अभिकर्मक

ग्लूटैमिक अम्ल (बी० डी० एच०), ग्लाइसीन (मर्क), α-एलानिन (मर्क), DL वैलीन (मर्क), L-ल्यूसीन (मर्क), कापर सल्फेट (अनालार बी० डी० एच०), निकेल सल्फेट (अनालार बी० डी० एच०), परक्लोरिक अम्ल (रीडेल), सोडियम परक्लोरेट (रोडेल), सोडियम हाइड्राक्साइड (एस० मर्क)।

सभी विलयन कार्बन डाइआक्साइड से मुक्त शुद्ध आसुत जल में बनाये गये तथा उनका मानकीकरण उपयुक्त मानक विधियों द्वारा किया गया। पी-एच के मापनों के लिये लीड्स-नार्थ्रप का पी-एच मापी (25° सें० पर) प्रयुक्त हुआ।

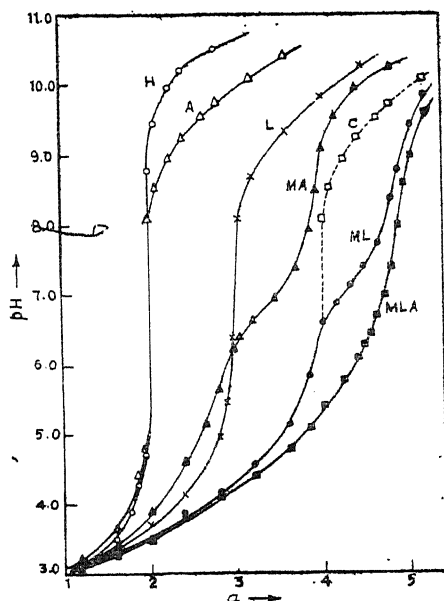
अनुमापन विधि

निम्नलिखित मिश्रण तैयार किये गये एवं प्रत्येक का पूर्ण आयतन 50 मिली० रखा गया।

(i) H: अम्ल (0·002M परक्लोरिक अम्ल), (ii) L: प्राथमिक लिगैंड (0·001M ग्लूटैमिक अम्ल), (iii) A: गौण लिगैंड (0·001M ग्लाइसीन अथवा α-एलानिन अथवा वैलीन अथवा ल्यूसीन), (iv) ML Cu(II) या Ni(II) तथा ग्लूटैमिक अम्ल का 1:1 संकर (v) MA (Cu(II) या Ni(II) के गौण लिगैंड के 1:1 संकर) तथा (vi) MLA (Cu(II) या Ni(II) के 1:1:1 मिश्रित संकर)। सभी मिश्रण विलयनों की आयनिक सान्द्रता निश्चित (0·1 M सोडियम परक्लोरेट) रखी गई, तथा उनमें मुक्त परक्लोरिक अम्ल की मात्रा भी समान (0·002M) रखी गई। इन मिश्रणों का पुनः एक कार्बोनेट से मुक्त मानक 0·2N सोडियम हाइड्राक्साइड विलयन द्वारा पृथक-पृथक पी-एच मापी अनुमापन किया गया। चित्र 1 तथा 2 में क्रमशः Cu(II)-ग्लूटैमिक अम्ल-ग्लाइसीन, तथा Ni(II)-ग्लूटैमिक अम्ल-ग्लाइसीन मिश्रित निकायों के पी-एच अनुमापन वक्र प्रदर्शित हैं। इसी प्रकार के अनुमापन वक्र अन्य गौण लिगैंडों यथा α-एलानिन, वैलीन तथा ल्यूसीन के प्रयोग द्वारा भी प्राप्त हुये (चित्र 3)।

इन चित्रों में उपर्युक्त मिश्रित निकायों के संयुक्त वक्र (composite curves) [3, 4] भी प्रदर्शित हैं। संयुक्त वक्रों की गणना इस आधार पर की गई है कि यदि इन निकायों में कोई मिश्रित कीलेट न बनता, और अनुमापन के मध्य केवल Cu(II) अथवा Ni(II) के सरल 1:1 (ML) कीलेट तथा मुक्त गौण लिगैंड (HA) की ही स्पीशीज़ उपस्थित होतीं तो अनुमापन वक्र की क्या स्थिति होती। इसप्रकार ML कीलेट के अनुमापन वक्र में गौण लिगैंड (HA) के अनुमापन वक्र के ग्राफीय योग के द्वारा संयुक्त वक्र मिलता है। चूँकि मिश्रित निकायों के प्रयोगात्मक अनुमापन वक्र उनके परिकलित संयुक्त वक्रों से नितांत भिन्न हैं, अतः इन निकायों में मिश्रित कीलेटों के निर्माण का आभास होता है। मिश्रित कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांकों की गणना पूर्ववर्णित विधि [1] द्वारा की गई है।

परिणाम तथा विवेचना

चित्र 1 में 1:1 Cu(II)-ग्लूटैमिक अम्ल (ML), 1:1Cu(II)-ग्लाइसीन (MA) तथा 1:1:1Cu(II) ग्लूटैमिक अम्ल-ग्लाइसीन (MLA) निकायों के अनुमापन वक्र प्रदर्शित हैं। ML अनुमापन वक्र में लगभग 4 तुल्यांक ($a \approx 4$) पर नति-परिवर्तन होता है, जिसके बाद लगभग 6·5 पी-एच के ऊपर वक्र कुछ नीचे विस्थापित हो जाता है। यह वह क्षेत्र है जहाँ हाइड्राक्सी कीलेट (MLOH) का निर्माण होता है। मिश्रित निकाय (MLA) के वक्र में 4 तुल्यांक पर कोई नति-परिवर्तन नहीं प्राप्त होता, परन्तु ($a=5$) 5 तुल्यांक पर एक स्पष्ट नति-परिवर्तन दृष्टिगत होता है। इसके अतिरिक्त लगभग 3 तुल्यांक ($a=3$) तक MLA वक्र ML वक्र के बिल्कुल सन्निकट चलता है, परन्तु 3 तुल्यांक से 5 तुल्यांक तक के क्षेत्र में

चित्र 1 कापर (II)-ग्लूटैमिक अम्ल- ग्लाइसीन निकाय के पी-एच अनुमापन वक्र

H: — 0·002M परक्लोरिक अम्ल, A:-ग्लाइसीन, L:-ग्लूटैमिक अम्ल

MA: — Cu(II) तथा ग्लाइसीन (1:1)

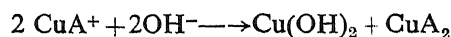
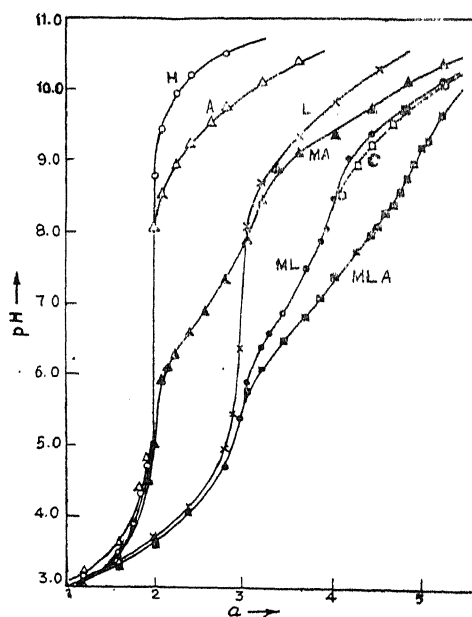
ML: — Cu(II), तथा ग्लूटैमिक अम्ल (1:1)

MLA: — Cu(II), ग्लूटैमिक अम्ल तथा ग्लाइसीन (1:1:1)

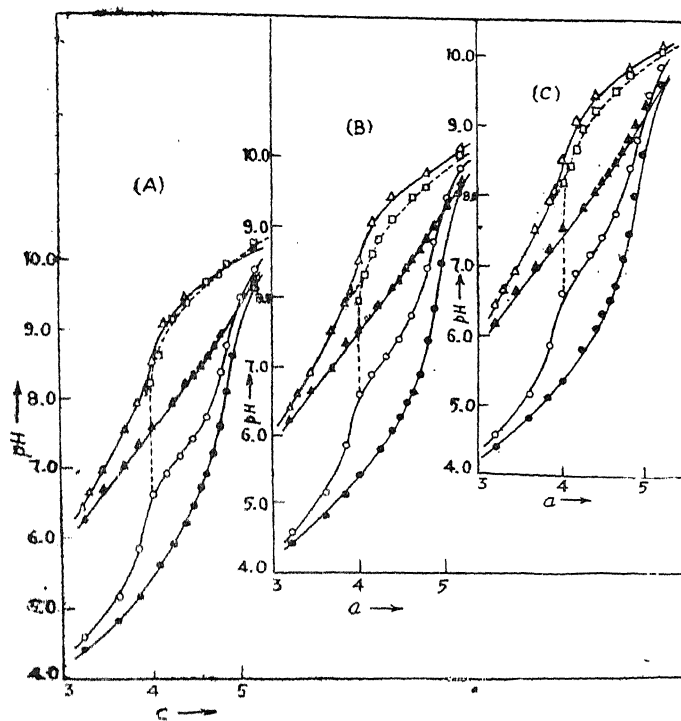
C:-संयुक्त वक्र, a:-तुल्यांक क्षार

सभी लिगैंडों की सान्द्रता=0·001M

इसमें बफर क्षेत्र अपेक्षतया निम्न पी-एच के मानों पर प्राप्त होता है, जो कि विशेष रूप से 4 से 5 तुल्यांक के मध्य अधिक स्पष्ट है। यह भी उल्लेखनीय है कि 1:1 सरल कीलेटों (ML, MA) के विलयनों का रंग हरा-नीला होता है, जबकि मिश्रित निकायों के विलयनों का रंग गहरा नीला होता है। इसके अतिरिक्त मिश्रित निकायों के विलयन 10·5 पी-एच तक नितांत स्पष्ट रहते हैं, जब कि 1:1 Cu ग्लूटैमिक अम्ल के निकाय में 7·5 पी-एच से ही विलयन गंदले पड़ने लगते हैं, तथा लगभग 9 पी-एच पर स्पष्ट अवक्षेप प्राप्त हो जाता है। 1:1 Cu(II)-ग्लाइसीन निकाय में तो 6·5 पी-एच पर $Cu(OH)_2$ का अवक्षेप आ जाता है, जिसका कारण यह है कि CuA कीलेट क्षार से क्रिया करके $Cu(OH)_2$ तथा CuA_2 कीलेट में अपघटित हो जाते हैं[6]।

$$2\,CuA^{+} + 2OH^{-} \longrightarrow Cu(OH)_2 + CuA_2$$

चित्र 2 में इसी प्रकार Ni(II)-ग्लूटैमिक अम्ल-ग्लाइसीन निकाय के अनुमापन वक्र प्रदर्शित हैं। इसके अवलोकन से यह स्पष्ट है कि इसमें ML वक्र 6 पी-एच तक लगभग लिगैंड वक्र (L) के साथ-साथ ही चलता है, और उसके पश्चात् कुछ अधिक विस्थापित हो जाता है, और अंत में लगभग 4 तुल्यांक पर नति-परिवर्तन दृष्टिगत होता है। मिश्रित निकाय (MLA) के वक्र में 4 तुल्यांक का यह नति-परिवर्तन अनुपस्थित है, और उसके स्थान पर 5 तुल्यांक ($a=5$) पर नति-परिवर्तन प्राप्त होता है। इसके

चित्र 2 निकेल (II)-ग्लूटैमिक अम्ल-ग्लाइसीन निकाय के पी-एच अनुमापन वक्र

(अन्य संकेतों का तात्पर्य चित्र 1 के समान Ni(II) के निकाय के लिये हैं।)

अतिरिक्त 3 तुल्यांक (a=3), लगभग 5·5 पी-एच तक MLA वक्र ML वक्र का संपाती है, परन्तु उसके बाद 3-5 तुल्यांक के मध्य ML वक्र की अपेक्षा इसमें बफर क्षेत्र निम्नतर पी-एच के मानों पर प्राप्त होता है। इस निकाय में रंग के परिवर्तन कुछ विशेष स्पष्ट नहीं होते, परन्तु निम्नलिखित प्रेक्षणों के

चित्र 3 कापर (II) तथा निकेल (II) के मिश्रित कीलेटों के पी-एच अनुमापन वक्र

(A) ग्लूटैमिक अम्ल-α-एलानिन निकाय

(B) ग्लूटैमिक अम्ल-वैलीन निकाय

(C) ग्लूटैमिक अम्ल-ल्यूसीन निकाय

⊙ Cu(II) तथा ग्लूटैमिक अम्ल (1:1)

⊙ Cu(II)-ग्लूटैमिक अम्ल गौण लिगैंड (1:1:1)

△ Ni(II) तथा ग्लूटैमिक अम्ल (1:1)

Δ Ni(II)-ग्लूटैमिक अम्ल-गौण लिगैंड (1:1:1)

.... संयुक्त वक्र

सभी लिगैंडों की सान्द्रता=0·001M

द्वारा मिश्रित कीलेट के निर्माण की पुष्टि होती है। 1:1 Ni(II)-ग्लूटैमिक अम्ल (ML) के निकाय में लगभग 9 पी-एच पर अवक्षेप प्रगट हो जाता है, परन्तु मिश्रित निकाय (MLA) में विलयन 10·5 पी-एच तक नितांत स्वच्छ रहते हैं। 1:1 Ni(II)-ग्लाइसीन निकाय में अवक्षेपण लगभग 8·5 पी-एच से प्रारंभ हो जाता है।

इस प्रकार यह प्रगट है कि इन निकायों में मिश्रित कीलेटों का निर्माण होता है। इसी प्रकार का व्यवहार अन्य गौण लिगैंडों के प्रयोग पर भी परिलक्षित है, जैसा कि चित्र 3 के अनुमापन वक्रों से स्पष्ट है।

सारणी 1

कापर (II) तथा निकेल (II) ग्लूटैमेटों के मिश्रित कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांक

(ताप=25°C, μ=0·1 M सोडियम परक्लोरेट)

गौण लिगैंड	Cu(II) $\log K_{MLA}$	Ni(II) $\log K_{MLA}$
ग्लाइसीन	6·47	4·78
α-एलानिन	6·37	4·58
वैलीन	6·34	4·52
ल्यूसीन	6·37	4·62

इन मिश्रित कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांकों की (सारणी 1) Cu(II) तथा Ni(II) के इन लिगैंडों से निर्मित सरल कीलेटों [6-8] के स्थायित्व स्थिरांकों K_1 तथा K_2 की तुलना से यह स्पष्ट है कि इनका मान सरल कीलेटों के K_2 मानों से भी कम है। ऐसे ही प्रेक्षण मिश्रित ऐस्पार्टेट कीलेटों के अध्ययन [1] में भी प्राप्त हुये थे, तथा इनकी व्याख्या उसी प्रकार एन्ट्रापी तथा सांख्यिकीय प्रभाव के आधार पर की जा सकती है, जैसे पहले [1] की गई थी।

यह भी उल्लेखनीय है कि इन मिश्रित ग्लूटैमेट कीलेटों के K_{MLA} के मान संगत मिश्रित ऐस्पार्टेट कीलेटों के मानों से कुछ कम हैं। इसका कारण संभवत: ग्लूटैमेट कीलेटों की अपेक्षतया अधिक स्थूलता से उत्पन्न त्रिविम प्रभाव है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (रमेश चन्द्र तिवारी) सी० एस० आई० आर० नई दिल्ली का सीनियर रिसर्च फेलोशिप के रूप में आर्थिक सहायता पाने के हेतु आभारी है।

निर्देश

1. सिंह, एम० के० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०, **जर्नं० इनआर्गं० न्यूक्लि० केमि०**, 1973, **35**, 2443.
2. वर्मा, एच० एस० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०, **जर्न० इनआर्गं० न्यूक्लि० केमि०**, 1975, **37**, 601
3. कैरी, जी० एच०, बोगुकी, आर० एफ० तथा मार्टेल, ए० ई०, **इनआर्ग केमि०**, 1964, **3**, 1288.
4. ओजर, यू० वाई०, **जर्नं० इनआर्गं० न्यूक्लि० केमि०**, 1970, **32**, 1279.
5. चैबरेक, एस० तथा मार्टेल, ए० ई० "Organic Sequestering Agents" **जॉन विले ऐन्ड सन्स, न्यूयार्क**, 1959, पृष्ठ 36-39.
6. मांक, सी० बी०, **ट्रांजे० फैरडे सोसा०**, 1951, **47**, 285, 297.
7. फ्लड, एच० तथा लोगस, वी०, **सेएरट्रिक एव टिडसीक्रफट फर केमी० वर्गवेसेन ऑग मेटलर्जी**, 1954, **6**, 1.
8. रेबर्टस, श्रार० ई०, डाक्टरल डिजर्टेशन, **इलिनॉय युनिवर्सिटी** 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 20, No. 4, October, 1977, Pages 385-392

दो चरों वाले H-फलन के कतिपय तत्समक

नाम प्रसाद सिंह
गणित विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—अप्रैल 21, 1977]

सारांश

इस शोध पत्र में दो चरों वाले H-फलन के लिए कुछ तत्समक स्थापित किये गये हैं। ऐसा विश्वास है कि प्रस्तुत परिणाम नवीन हैं। परिणामों की प्रकृति सामान्य होने के कारण कई पूर्वज्ञात तथा नये परिणाम विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं। आनन्दानी [1] द्वारा पूर्वज्ञात किये गये तत्समकों को विशिष्ट दशाओं के रूप में दर्शाया गया है।

Abstract

Identities for H-function of two variables. By Namprasad Singh, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal (M. P.).

In this paper, we establish a number of identities for the H-function of two variables. The results are believed to be new. The results are of general character, hence many known as well as new results, can be obtained as particular cases.

Identities due to Anandani [1] have been shown as particular cases.

1. प्रस्तावना

दो चरों वाले सार्वीकृत फाक्स [2, p. 408] के H-फलन को मित्तल तथा गुप्ता [3, p. 117] ने मेलिन-बार्नीज के समाकल के रूप में परिभाषित किया है, जिसको हम निम्न प्रकार से प्रदर्शित करेंगे :

$$H^{0,\, n_1;\, m_2;\, n_2;\, m_3,\, n_3}_{p_1,\, q_1;\, p_2,\, q_2,\, p_3,\, q_3}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\, \alpha_{p_1},\, A_{p_1}));\, ((c_{p_2},\, \gamma_{p_2}));\, ((e_{p_3},\, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1};\, \beta_{q_1},\, B_{q_1}));\, ((d_{q_2},\, \delta_{q2}));\, ((f_{q_3},\, f_{q_3})) \end{matrix}\right]$$

$$=\int \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L1} \int_{L2} \phi(s,\, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s\, y^t\, ds\, dt, \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ

$$\phi(s, t)=\frac{\prod_{j=1}^{n1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)}{\prod_{j=n_1+1}^{p1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t) \prod_{j=1}^{q1} (1-b_j+\beta_j s+B_j t)} \tag{1·2}$$

$$\theta_1(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m2} \Gamma(d_j-\delta_j s) \prod_{j=1}^{n2} \Gamma(1-c_j+\gamma_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q2} \Gamma(1-d_j+\delta_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p2} \Gamma(c_j-\gamma_j s)} \tag{1·3}$$

$$\theta_2(t)=\frac{\prod_{j=1}^{m3} \Gamma(f_j-F_j t) \prod_{j=1}^{n3} \Gamma(1-e_j+E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q3} \Gamma(1-f_j+F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p3} \Gamma(e_j-E_j t)} \tag{1·4}$$

(1·1) का समाकल निम्नांकित प्रतिबंधों के अन्तर्गत पूर्णतया अभिसारी है यदि

$|\arg x| < \frac{1}{2}\mu_1\pi$ तथा $|\arg y| < \frac{1}{2}\mu_2\pi$ हो, जहाँ,

$$\mu_1=\sum_{j=1}^{n1} (\alpha_j)-\sum_{j=n_1+1}^{p1} (\alpha_j)-\sum_{j=1}^{q1} (\beta_j)+\sum_{j=1}^{m2} (\delta_j)-\sum_{j=m_2+1}^{q2} (\delta_j)$$

$$+\sum_{j=1}^{n2} (\gamma_j)-\sum_{j=n_2+1}^{p2} (\gamma_j)>0 \tag{1·5}$$

$$\mu_2=\sum_{j=1}^{n1} (A_j)-\sum_{j=n_{1+1}}^{p1} (A_j)-\sum_{j=1}^{q1} (B_j)+\sum_{j=1}^{m3} (F_j)-\sum_{j=m_3+1}^{q3} (F_j)$$

$$+\sum_{j=1}^{n3} (E_j)-\sum_{j=n_3+1}^{p3} (E_j)>0. \tag{1·6}$$

इस शोध पत्र में आगे सर्वत्र (1·1) द्वारा परिभाषित दो चरों वाले कंटूर समाकल को हम सांकेतिक रूप में $H(x, y)$ द्वारा व्यक्त करेंगे तथा प्राचलों के समुच्चयों $((a_{p1}\ \alpha_{p1}, Ap_1))$, $((c_{p2}, \gamma_{p2}))$, $((e_{p3}, E_{p3}))$, $((b_{q1}; \beta_{q1}, \beta_{q1}))$, $((d_{q2}, \delta_{q2}))$, $((f_{q3}, F_{q3}))$ को क्रमश: (P_1), (P_2), (P_3), (Q_1) (Q_2), (Q_3), द्वार अंकित करेंगे । समुच्चय $(a_{p1}; \alpha_{p1}, A_{p1}))$ द्वारा $\{(a_1,; \alpha_1, A_1), \ldots, (a_{p1}, ap_1, A_{p1})\}$ का बोध होता है ।

2. H-फलन के तत्समक :

इस अनुभाग में H-फलन के लिये निम्न तत्समकों की विवेचना करेंगे।

प्रथम तत्समक :

$$H(x, y)=H^{0,\, n_1+3;\; m_2,\, n_2;\; m_3,\, n_3+1}_{p_1+3,\, q_1+3;\; p_2,\, q_2;\; p_3+1,\, q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}R, (P_1); (P_2); (b+1, k'), (P_3)\\(Q_1), S; (Q_2); (Q_3), (b, k')\end{matrix}\right]$$

$$-H^{0,\, n_1+3;\; m_2,\, n_2;\; m_3,\, n_3+1}_{p_1+3,\, q_1+3;\; p_2,\, q_2;\; p_3+1,\, q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\x\end{matrix}\middle|\begin{matrix}V, (P_1); (P_2); (b+1, k'), (P_3)\\(Q_1), W; (Q_2); (Q_3), (b, k')\end{matrix}\right] \quad (2{\cdot}1)$$

जहाँ

$$R=\{(a; h, h'), (a+c; h+l, h'+l'), (b+c+1; l, k'+l')\},$$

$$S=\{(a+1; h, h'), (a+c+1; h+l, h'+l'), (b+c; l, k'+l')\}$$

$$V=\{(a-b; h, h'-k'), (a+b+c; h+l, h'+k'+l'), (b+c+1; l, k'+l')\},$$

$$W=\{(a-b+1; h, h'-k'), (a+b+c+1; h+l, h'+k'+l'), (b+c; l, k'+l')\},$$

तथा $h' \geqslant k' > 0$.

द्वितीय तत्समक :

$$H(x, y)=H^{0,\, n_1+2;\; m_2+2,\, n_2;\; m_3,\, n_3}_{p_1+2,\, q_1+2;\; p_2+2,\, q_2+2;\; p_3,\, q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}R, (P_1); (P_2), (a, h), (a-b+1, h-k); (P_3)\\(Q_1), S; (a+1, h), (a-b, h-k), (Q_2); (Q_3)\end{matrix}\right]$$

$$H^{0,\, n_1+2;\; m_2+2,\, n_2;\; m_3,\, n_3}_{p_1+2,\, q_1+2;\; p_2+2,\, q_2+2;\; p_3,\, q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}V, (P_1); (P_2); (a-b+1, h-k), (b, k); (P_3)\\(Q_1), W; (a-b, h-k), (b+1, k) (Q_2); (Q_3)\end{matrix}\right] \quad (2{\cdot}2)$$

जहाँ

$$R=\{(b+c; k+l, l'), (c+1; l, l')\}, S=\{(b+c+1; k+l, l'), (c; l, l')\},$$

$$V=\{(a+c; h+l, l'), (c+1; l, l')\}, W=\{(a+c+1; h+l, l') (c; l, l')\},$$

तथा $h' \geqslant k' > 0$.

तृतीय तत्समक

$$H(x, y)=H^{0,\, n_1+2;\; m_2,\, n_2+1;\; m_3+1,\, n_3}_{p_1+2,\, q_1+2;\; p_2+1,\, q_2+1;\; p_3+1,\, q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}R, (P_1); (b, k), (P_2); (P_3), (c+1, l')\\(Q_1), S; (Q_2), (b+1, k); (c, l'), (Q_3)\end{matrix}\right]$$

$$-H^{0,\, n_1+3;\; m_2,\, n_2;\; m_3+1,\, n_3}_{p_1+3,\, q_1+3,\, p_2,\, q_2;\; p_3+1,\, q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}V, (P_1); (P_2); (P_3), (c+1, l')\\(Q_1), W; (Q_2); (c, l'), (Q_3)\end{matrix}\right] \quad (2{\cdot}3)$$

जहां

$$R=\{(a-b+1;h-k,h'),(a+c;h,h'+l')\},\ S=\{(a-b;h-k,h'),(a+c+1;h,h'+l')\},$$

$$V=\{(a;h,h'),(a-b+1;h-k,h'),(b+c;k,l')\},$$

$$W=\{(a+1;h,h'),(a-b;h-k,h'),(b+c+1;k,l')\}$$

तथा $h\geqslant k\geqslant 0$.

चतुर्थ तत्समक :

$$H(x,y)=H^{0,\,n_1+3;\,m_2,\,n_2+1;\,m_3,\,n_3}_{p_1+3,\,q_1+3;\,p_2+1,\,q_2+1;\,p_3,\,q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}R,(P_1);(a,h),(P_2);(P_3)\\(Q_1),S;(Q_2),(a+1,h),(Q_3)\end{matrix}\right]$$

$$-H^{0,\,n_1+3;\,m_2,\,n_2;\,m_3+1,\,n_3}_{p_1+3,\,q_1+3;\,p_2,\,q_2;\,q_2;\,p_3+1,\,q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}V,(P_1);(P_2);(P_3),(b,k')\\(Q_1),W;(Q_2);(b+1,k')\,(Q_3)\end{matrix}\right] \quad (2\cdot4)$$

जहाँ

$$R=\{(a+b+1;h,k'),b+c;l,l'+k'),(c+1;l,l')\},$$

$$S=\{(a+b;h,k'),(b+c+1;l,l'+k'),(c;l,l')\},$$

$$V=\{(a+b+1;h,k'),(c-a;l-h,l'),(c+1;l,l')\},$$

$$W=\{(a+b;h,k'),(c-a+1;l-h,l'),(c;l,l')\}$$

तथा $l\geqslant h\geqslant 0$

पंचम तत्समक :

$$H(x,y)=H^{0,\,n_1+3;\,m_2,\,n_2+1;\,m_3,\,n_3}_{p_1+3,\,q_1+3;\,p_2+1;\,q_2+1;\,p_3,\,q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}R,(P_1);(c+1,l),(P_2);(P_3)\\(Q_1),S;(Q_2),(c,l);(Q_3)\end{matrix}\right]$$

$$-H^{0,\,n_1+3;\,m_2,\,n_2+1;\,m_3,\,n_3}_{p_1+3,\,q_1+3;\,p_2+1,\,q_2+1;\,p_3,\,q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}V,(P_1);(c+1,l),(P_2);(P_3)\\(Q_1),W;(Q_2),(c,l);(Q_3)\end{matrix}\right] \quad (2\cdot5)$$

जहाँ

$$R=\{(a-b+1;h-k,h'-k'),(b;k,k'),(a-c;h-l,h')\},$$

$$S=\{(a-b;h-k,h'-k'),(b+1;k,k'),(a-c+1;h-l,h')\}.$$

$$V=\{(a;h,h'),(a-b+1;h-k,h'-k'),(b-c;k-l,k')\},$$

$$W=\{(a+1;h,h'),(a-b;h-k,h'-k'),(b-c+1;k-l,k')\}$$

तथा $h\geqslant k\geqslant l\geqslant 0,\ h'\geqslant k'\geqslant l'\geqslant 0$.

षष्टम तत्समक :

$$H(x,y)=H^{0,\ n_1+2;\ m_2,\ n_2;\ m_3,\ n_3}_{p_1+2,\ q_1+2;\ p_2,\ q_2;\ p_3,\ q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}R,(P_1);(P_2);(P_3)\\(Q_1),S;(Q_2);(Q_3)\end{matrix}\right]$$

$$+H^{0,\ n_1+2;\ m_2,\ n_2;\ m_3,\ n_3}_{p_1+2,\ q_1+2;\ p_2,\ q_2;\ p_3,\ q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}V,(P_1);(P_2);(P_3)\\(Q_1),W;(Q_2);(Q_3)\end{matrix}\right] \tag{3·6}$$

जहाँ

$$R=\{(a;\ h,\ h'),\ (a+b+1;\ h+k;\ h'+k')\},\ S=\{a+1;\ h,\ h'),\ (a+b;\ h+k,\ h'+k')\}$$

$$V=\{(a+b+1;\ h+k,\ h'+k'),\ (b;\ k,\ k')\},\ W=\{(a+b;\ h+k,\ h'+k'),\ (b+1;\ k,\ k')\}$$

सप्तम तत्समक :

$$H(x,y)=H^{0,\ n_1+2;\ m_2,\ n_2;\ m_3,\ n_3}_{p_1+2,\ q_1+2;\ p_2\ q_2;p_3,\ q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(R,(P_1);P_2);(P_3)\\(Q_1),S;(Q_2);(Q_3)\end{matrix}\right]$$

$$-H^{0,\ n_1+2;\ m_2,\ n_2;\ m_3,\ n_3}_{p_1+2,\ q_1+2;\ p_2,\ q_2;\ p_3,\ q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}V,(P_1);(P_2);(P_3)\\(Q_1),W;(Q_2);(Q_3)\end{matrix}\right] \tag{2·7}$$

जहाँ

$$R=\{(a+1;\ h,\ h'),\ (a+b;\ h+k,\ h'+k')\},\ S=\{(a;\ h,\ h'),\ (a+b+1;\ h+k,\ h'+k')\},$$

$$H=\{(a+1;\ h,\ h'),\ (b;\ k,\ k')\},\ W=\{(a;\ h,\ h'),\ (b+1;\ k,\ k')\}$$

अष्ठम तत्समक :

$$H(x,y)=H^{0,\ n_1+2;\ m_2,\ n_2;\ m_3,\ n_3}_{p_1+2,\ q_1+2;\ p_2,\ q_2;\ p_3,\ q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}R,(P_1);P_2);(P_3)\\(Q_1),S;(Q_2);(Q_3)\end{matrix}\right]$$

$$-2H^{0,\ n_1+2;\ m_2,\ n_2;\ m_3,\ n_3}_{p_1+2,\ q_1+2;\ p_2,\ q_2;\ p_3,\ q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}V,(P_1);(P_2);(P_3)\\(Q_1),W;(Q_2);(Q_3)\end{matrix}\right] \tag{2·8}$$

जहाँ

$$R=\{(a-b;\ h-k,\ h'-k'),\ (a+b+1;\ h+k,\ h'+k')\},$$

$$S=\{(a-b+1;\ h-k,\ h'-k').\ (a+b;\ h+k,\ h'+k')\},$$

$$V=\{(a+b+1;\ h+k,\ h'+k'),\ (b;\ k,\ k')\},\ W=\{(a+b;\ h+k,\ h'+k'),\ (b+1;\ k,\ k')\}$$

$h-k\geqslant 0$ तथा $h'-k'\geqslant 0$

उपपत्ति :

(2·1) द्वारा अंकित प्रथम तत्समक के सत्यापन के लिये उसमें दाहिने पक्ष में आये हुए दो चरों वाले H-फलन को (1·1) की भांति मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल के पदों में व्यक्त करने पर हमें

निम्नांकित प्राप्त होता है:—

$$\text{दाहिना पक्ष}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(s,t)\,\theta_1(s)\,\theta_2(t)\,[A-B]x^s y^t\,ds\,dt, \tag{2·9}$$

जहाँ
$$A=\frac{\Gamma(1-a+hs+h't)\,\Gamma[1-a-c+(h+l)s+h'+l')t]}{\Gamma(-a+hs+h't)\,\Gamma[-a-c+(h+l)s+(n'+l')t]}$$
$$\times\frac{\Gamma(-b+k't)\,\Gamma[1-b-c+ls+(k'+l')t]}{\Gamma(1-b+k't)\,\Gamma[-b-c+ls+(k'+l')t])}, \tag{2·10}$$

तथा
$$B=\frac{\Gamma[1-a+b+hs+(h'-k')t]\,\Gamma(-b+k't)}{\Gamma[-a+b+hs+(h'-k')t]\,\Gamma(1-b+k't)}$$
$$\times\frac{\Gamma[1-a-b-c+(h+l)s+(h'+k'+l')t]\Gamma[1-b-c+ls+(k'+l')t]}{\Gamma(-a-b-c+(h+l)s+(h'+k'+l')t]\Gamma[-b-c+ls+(k'+l')t} \tag{2·11}$$

अब $\Gamma(z+1)=Z\,\Gamma(z)$ का उपयोग कर (2·10) तथा (2·11) को सरल करके तथा (2·10) में से (2·11) को घटाने के पश्चात् तथा इस प्रकार $(A-B)$ के प्राप्त मान को (2·9) में प्रयुक्त करके तथा फल को (1·1) द्वारा परिभाषित दो चरों वाले H-फलन की सहायता से विवेचित करने पर हमें (2·1) का वाम पक्ष प्राप्त होता है।

3. विशिष्ट दशायें

प्राचलों का विशिष्टीकरण करने पर विभिन्न फलनों हेतु कई रोचक तत्समक प्राप्त होते हैं। उनमें से हम कुछ की यहाँ विवेचना करेंगे।

(i) यदि (2·1) में $h'=k'=l'=l=0$ का उपयोग करें तो एक चर वाले H-फलन के लिये निम्नलिखित तत्समक प्राप्त होता है :

$$H(x)=\frac{1}{b(b+c)}\left\{H^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[x\left|\begin{matrix}(a,h),(a+c,h),((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q)),(a+1,h),(a+c+1),h)\end{matrix}\right.\right]\right.$$
$$\left.-H^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[x\left|\begin{matrix}(a-b,h),(a+b+c,h),((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q)),(a-b+1,h),(a+b+c+1,h),\end{matrix}\right.\right]\right\} \tag{3·1}$$

(ii) यदि (3·1) में $b=-k$, $c=-1$ रखें तो आनन्दानी [1, p. 136 (4:1, 4·2)] द्वारा पूर्व ज्ञात तत्समक प्राप्त होते हैं।

(iii) यदि (3·1) में $a=\alpha-\frac{1}{2}$, $b=\beta$, $c=\frac{1}{2}$ रखें तो आनन्दानी [1, p. 136 (4·3)] द्वारा पूर्व ज्ञात तत्समक प्राप्त होता है।

(iv) इसी प्रकार (3·1) में $a=\alpha$, $b=-1$, $c=-(\beta+1)$ का मान रखने पर हमें आनन्दानी [1, p. 136 (4·4)] द्वारा पूर्वज्ञात एक और तत्समक प्राप्त होता है।

(v) यदि (2·2) में $h=k,\ l=l'=0$ रखें तो एक चर वाले फलन के लिये निम्नलिखित तत्समक प्राप्त होता है :

$$H(x)=\frac{1}{(a-b)c}\left\{H^{m,\ n+2}_{p+2,\ q+2}\left[x\left|\begin{matrix}(a,\ h),\ (b+c,\ h),\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q)),\ (a+1,\ h),\ (b+c+1,\ h)\end{matrix}\right.\right]\right.$$

$$\left.-H^{m,\ n+2}_{p+2,\ q+2}\left[x\left|\begin{matrix}(a+c,\ h),\ (b,\ h),\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q)),\ (a+c+1,\ h),\ (b+1,\ h)\end{matrix}\right.\right]\right\} \tag{3·2}$$

(vi) यदि (2·6) में $k=0,\ h'=0$ रखें तो दो चरों वाले H-फलन के लिये निम्नलिखित तत्समक प्राप्त होता है :

$$H(x,\ y)=H^{m,\ n_1+1;\ m_2,\ n_2+1;\ m_3,\ n_3}_{p_1+1,\ q+1;\ p_2+1,\ q_2+1;\ p_3,\ q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a+b+1;\ h,\ k'),\ (P_1);\ (a,\ h),\ (P_2);\ (P_3)\\(Q_1),\ (a+b;\ h,\ k');\ (Q_2),\ (a+1,\ h);\ (Q_3)\end{matrix}\right.\right]$$

$$+H^{0,\ n_1+1;\ m_2,\ n_2;\ m_3,\ n_3+1}_{p_1+1,\ q_1+1;\ p_2,\ q_2;\ p_3+1,\ q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a+b+1;\ h,\ k'),\ (P_1);\ (P_2);\ (b,\ k'),\ (P_3)\\(Q_1),\ (a+b,\ h,\ k');\ (Q_2);\ (Q_3),\ (b+1,\ k')\end{matrix}\right.\right] \tag{3·3}$$

(vii) यदि (2·6) में $h'=k'=0$ का उपयोग करें तो निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$H(x)=H^{m,\ n+2}_{p+2,\ q+2}\left[x\left|\begin{matrix}(a,\ h),\ (a+b+1,\ h+k),\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q)),\ (a+1,\ h),\ (a+b,\ h+k)\end{matrix}\right.\right]$$

$$+H^{m,\ n+2}_{p+2,\ q+2}\left[x\left|\begin{matrix}(a+b+1,\ h+k),\ (b,\ k),\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q)),\ (a+b,\ h+k),\ (b+1,\ k)\end{matrix}\right.\right] \tag{3·4}$$

(viii) इसी प्रकार (2·7) में $k=0,\ h'=0$ मान रखने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$H(x,\ y)=H^{0,\ n_1+1;\ m_2,\ n_2+1;\ m_3,\ n_3;}_{p_1+1,\ q_1+1;\ p_2+1,\ q_2+1;\ p_3,\ q_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\begin{matrix}(a+b;\ h,\ k'),\ (P_1);\ (a+1,\ h),\ (P_2);\ (P_3)\\(Q_1),\ (a+b+1;\ h,\ k');\ (Q_2),\ (a,\ h);\ (Q_3)\end{matrix}\right]$$

$$-H^{0,\ n_1;\ m_2,\ n_2+1;\ m_3,\ n_3+1}_{p_1,\ q_1;\ p_2+1,\ q_2+1;\ p_3+1,\ q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\left|\begin{matrix}(P_1);\ (a+1,\ h),\ (P_2);\ (b,\ k'),\ (P_3)\\(Q_1);\ (Q_2),\ (a,\ h);\ (Q_3),\ (b+1,\ k')\end{matrix}\right.\right] \tag{3·5}$$

(ix) यदि (2·8) में $h=k,\ h'=k'=0$ का उपयोग करें तो निम्नलिखित तत्समक प्राप्त होता है :

$$H(x)=(b-a)H^{m,\ n+1}_{p_1+1,\ q+1}\left[x\left|\begin{matrix}(a+b+1,\ 2h),\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q)),\ (a+b,\ 2h)\end{matrix}\right.\right]$$

$$+2H^{m,\ n+2}_{p+2,\ q+2}\left[x\left|\begin{matrix}(a+b+1,\ 2h),\ (b,\ h),\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q)),\ (a+b,\ 2h),\ (b+1,\ h)\end{matrix}\right.\right] \tag{3·6}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० पी० आनन्दानी का, उनके द्वारा दिये गये मार्ग दर्शन के लिये अत्यंत आभारी है।

निर्देश

1. आनन्दानी, पी०, **अनेल्स पालो० मैथेमेटिकी**, 1969, 125-137
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजे० अमे० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
3. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस,** 1972, **75A**, 117-123

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों बीच में पार्श्व में संशोधन के लिए उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4 लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार हो कर आने चाहिए। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8 लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०। **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9 प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिण्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख "**सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, प्रयाग**", इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil.

वार्षिक मूल्य : 8 रु० या 20 शि० या 4 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 2 रु० या 5 शि० या 1 डालर

Annual Rs. 8 *or* 20 sh. *or* $ 4
Per Vol. Rs. 2 *or* 5 sh. *or* $ 1

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग